Ueber das Problem der Bestimmbarkeit der Cremona'schen Transformation 3ter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät hiesiger Universität

zur Erlangung der Doctorwürde

am Sonnabend, den 5. Juli 1879, Mittags 12 Uhr

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

in der Aula Leopoldina

öffentlich vertheidigen wird

Theodor Maschke

gegen die Herren:

Hermann Reim, Dr. phil., und **Julius Unverricht**, cand. math.

BRESLAU.

F. W. Jungfer's Buchdruckerei.

1879.

Herrn Professor Dr. J. Rosanes

aus Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545819_0130

Die Aufgabe, eine eindeutig umkehrbare, nicht lineare Transformation durch Annahme von Fundamentalpunkten, Fundamentallinien und entsprechenden Punktepaaren zu bestimmen, ist bisher nur für die quadratische Verwandtschaft behandelt worden und zwar synthetisch von Herrn Th. Reye[1]), auf analytischem Wege von Herrn Ed. Weyr[2]).

In Nachfolgendem will ich versuchen, eine Lösung des analogen Problems für die Cremona'sche Transformation 3ter Ordn. zu geben.

Es sind im Wesentlichen zwei Methoden, deren ich mich hierbei bedienen werde.

Die eine beruht auf der Erwägung, dass eine eindeutige Transformation immer dann bestimmt sein wird, wenn es möglich ist, zu einem beliebigen Punkte der einen Ebene eindeutig den entsprechenden Punkt der zweiten Ebene und umgekehrt zu construiren. Dies wird der Fall sein, sobald durch die gemachten Angaben zwei projectivische Beziehungen festgelegt werden, die für die betreffende Transformation charakteristisch sind, d. h. zwei solche Beziehungen, welche gleichzeitig bei keiner anderen eindeutigen Verwandtschaft auftreten können.

Vermöge einer bestimmten Cremona'schen Transformation nter Ordn. wird aber bekanntlich einem beliebigen Strahlbüschel der einen Ebene ein bestimmtes Curvenbüschel nter Ordn. der anderen Ebene projectivisch zugeordnet, dessen Basispunkte, ausser einem einfachen, in gewissen festen Punkten liegen, den sogenannten Fundamentalpunkten dieser Ebene,

[1]) Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 11.

[2]) ib. Bd. 14.

so dass dem Mittelpunkt des Strahlbüschels eindeutig jener einfache Basispunkt entspricht. — Eine Transformation n^{ter} Ordn. wird nun offenbar stets bestimmt sein, wenn zwei derartige Beziehungen bekannt sind. Geben wir z. B. sämmtliche Fundamentalpunkte $b_1 \ldots\ldots b_\nu$ einer Ebene x und ausserdem vier Paar entsprechende Punkte $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}$, wo die Punkte $z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ einer zweiten Ebene z angehören, so können wir mit Hilfe der Relationen

$[b_1 \ldots\ldots b_\nu\, x_1]\ (x_2\ x_3\ x_4 \ldots\ldots x_n) \barwedge z_1\ (z_2\ z_3\ z_4 \ldots z_n)$,

$[b_1 \ldots\ldots b_\nu\, x_2]\ (x_1\ x_3\ x_4 \ldots\ldots x_n) \barwedge z_2\ (z_1\ z_3\ z_4 \ldots z_n)$,

zu jedem Punkte x_n der Ebene x eindeutig den entsprechenden Punkt z_n der Ebene z und umgekehrt finden. Die Transformation ist mithin durch jene Daten eindeutig fixirt.

Die Richtigkeit der eben angegebenen Construction beruht auf der bekannten Thatsache, dass zwei Gebilde der ersten Stufe — Strahlbüschel und Curvenbüschel n^{ter} Ordn. — projectivisch auf einander bezogen sind, wenn man drei Paar entsprechende Elemente kennt.

Es würde jedoch falsch sein, hieraus den Schluss zu ziehen, dass das Bestimmungs-Problem einer Transformation n^{ter} Ordn. stets auf die Aufgabe zurückgeführt werden kann, die Projectivität eines Strahlbüschels und eines gewissen Curvenbüschels n^{ter} Ordn. durch Daten festzulegen. Dieser Schluss wäre nur dann berechtigt, wenn keine der übrigen projectivischen Beziehungen, die bei einer Transformation n^{ter} Ordn. auftreten, durch die Festlegung jener Projectivität überbestimmt würde.

Verlegt man aber den Mittelpunkt des Strahlbüschels in einen Fundamentalpunkt, z. B. einen i-fachen, so wird dadurch der Grad des entsprechenden Curvenbüschels n^{ter} Ordn. um i Einheiten erniedrigt, indem eine feste Curve i^{ter} Ordn., die jenem Fundamentalpunkte zugeordnete Fundamentallinie, allen Curven unseres Büschels gemeinsam ist. Es existiren also thatsächlich Relationen, von denen sich von vornherein absehen lässt, dass sie im Allgemeinen durch weniger Daten bestimmt sein werden als jene, bei denen ein beliebiges Strahlbüschel und ein Curvenbüschel n^{ter} Ordn. in Frage kommt.

Die Transformation 3ter Ordn. giebt nur zu zwei derartigen Projectivitäten Veranlassung. Das eine Mal sind es zwei projectivisch zugeordnete Strahlbüschel, welche den Doppelpunkt der ersten resp. der zweiten Ebene zu Mittelpunkten haben, das andere Mal ein Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt ein einfacher Fundamentalpunkt der einen Ebene ist, und ein demselben projectivisch entsprechendes Kegelschnittbüschel. Die Basispunkte des letzteren liegen in dem Doppelpunkt und drei einfachen Fundamentalpunkten der zweiten Ebene.

Durch diese beiden Beziehungen ist die Transformation vollständig charakterisirt, und unsere Aufgabe wird der Hauptsache nach darauf hinauskommen, jene niedrigsten Projectivitäten durch Daten zu bestimmen.

In welcher Weise dies für zwei Strahlbüschel zu geschehen hat, darüber giebt das bekannte Problem der Homographie Aufschluss[1]). — Die zweite Aufgabe, bei welcher es sich um Festlegung der Projectivität eines Strahlbüschels und eines Kegelschnittbüschels handelt, hat bisher nur für den Fall eine Erledigung erfahren, dass der Mittelpunkt des Strahlbüschels von vornherein gegeben ist[2]).

Der späteren Anwendung wegen wollen wir hier die wichtigsten darauf bezüglichen Sätze zusammenstellen, soweit dieselben bereits bekannt sind.

I. No. 1. Sind vier Punktepaare $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}$ und der Mittelpunkt a eines Strahlbüschels gegeben, so liegen alle Punkte R, welche der Bedingung genügen

$$a\,(x_1 \ldots x_4) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots z_4)$$

auf einem bekannten Kegelschnitt, der durch die Punkte $z_1 \ldots z_4$ geht.

---

[1]) Chasles, Comptes rendus, 1855. — Jonquières, Nouvelles annales de mathématiques, t. 17. — Cremona, Nouvelles annales de mathématiques, t. 20. — Sturm, Math. Annalen, Bd. 1. — Schröter, Crelle's Journal, Bd. 62. — Hesse, Crelle's Journal, Bd. 62.

[2]) Jonquières, Essai sur la génération des courbes géométriques. Paris, 1858. — Kortum, Ueber geometrische Aufgaben 3ten und 4ten Grades. Bonn, 1869. — H. Müller, Zur Geometrie auf den Flächen 2ter Ordn. Math. Annalen, Bd. 1.

No. 2. Sind fünf Punktepaare $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{matrix}$ und der Mittelpunkt a eines Strahlbüschels gegeben, so existirt im Allgemeinen nur ein einziger Punkt R, für welchen die Beziehung besteht $a(x_1 \ldots x_5) \overline{\wedge} R(z \ldots z_5)$.

No. 3. Sind sechs Punktepaare $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix}$ gegeben, so liegen alle Punkte a und alle Punkte R, welche die Eigenschaft haben, dass $a(x_1 \ldots . x_6) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots . z_6)$ ist, bezüglich auf zwei Curven 3ter Ordn., welche durch die Punkte $x_1 \ldots . x_6$ resp. $z_1 \ldots . z_6$ gehen.

No. 4. Sind sieben Punktepaare $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \end{matrix}$ gegeben, so lassen sich im Allgemeinen höchstens drei Punktepaare $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix}$, mindestens aber eins so finden, dass $a_i(x_1 \ldots . x_7) \overline{\wedge} R_i(z_1 \ldots . z_7)$ ist[1]).

II. No. 1. Sind ν Basispunkte $b_1 \ldots b_\nu$ eines Kegelschnittbüschels gegeben, wo ν eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 bedeutet, ausserdem $\mu = 11 - 2\nu$ Punktpaare $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_\mu \\ z_1 \ldots . z_\mu \end{matrix}$ und der Mittelpunkt S eines Strahlbüschels $S(z_1 \ldots . z_\mu)$, so lassen sich die übrigen $4 - \nu$ Basispunkte im Allgemeinen eindeutig so bestimmen, dass $S(z_1 \ldots . z_\mu) \overline{\wedge} [b_1 \ldots .](x_1 \ldots x_\mu)$ ist.

No. 2. Sind ν Basispunkte $b_1 \ldots b_\nu$ eines Kegelschnittbüschels gegeben, ausserdem $\mu = 10 - 2\nu$ Punktepaare

---

[1]) Die Lösung der Aufgabe 4, welche Herr Reye im 11ten Bande von Schlömilch's Zeitschrift giebt, beruht lediglich auf der Lösung eines Problems, welches Herr Seidewitz im 9ten Bande von Grunert's Archiv aufgestellt hat, nämlich jenes: Um ein gegebenes n-Eck (wo n eine durch die Natur der Aufgabe selbst erst zu bestimmende Zahl bedeutet) ein anderes zu beschreiben, welches mit einem zweiten gegebenen n-Eck in reciproker Beziehung stehe.

Eine erschöpfende Behandlung dieser Aufgabe findet sich in der Abhandlung «Problematis geometrici etc.», welche Herr Schröter 1862 in Breslau veröffentlichte, und die 1863 im 62ten Bande des Crelle'schen Journals abgedruckt wurde. Die Lösung des Seidewitz'schen Problems, welche Herr Reye gefunden hat, stimmt ihrem Inhalt und theilweise auch ihrer Form nach überein mit der, welche Herr Schröter bereits vier Jahre vorher bekannt gemacht hatte.

$\begin{matrix} x_1 \ldots x_\mu \\ z_1 \ldots z_\mu \end{matrix}$ und der Mittelpunkt S eines Strahlbüschels $S(z_1 \ldots z_\mu)$, so liegen die $4 - \nu$ fehlenden Basispunkte, wenn

$$S(z_1 \ldots z_\mu) \barwedge [b_1 \ldots](x_1 \ldots x_\mu)$$

sein soll, im Allgemeinen auf einer Curve 4^{ter} Ordn., welche durch die gegebenen Basispunkte je zweimal und durch die gegebenen Punkte $x_1 \ldots x_\mu$ je einmal geht[1]). —

Das eben angegebene Verfahren, die cubische Verwandtschaft durch Festlegung der beiden niedrigsten Projectivitäten zu bestimmen, welche bei der Transformation auftreten, ist nicht immer das einfachste. In vielen Fällen gelangen wir kürzer zum Ziele vermöge einer zweiten Methode. Dieselbe stützt sich auf den fundamentalen Satz von der Zerlegbarkeit einer Cremona'schen Transformation n^{ter} Ordn. in eine quadratische und eine Transformation p^{ter} Ordn., wo

$$\frac{n}{2} \leqq p \leqq n - 1 \text{ ist}^2).$$

Diese Zerlegung geschieht gewöhnlich in der Weise, dass man irgend eine quadratische Verwandtschaft zwischen der Hauptebene x und der Hilfsebene y so wählt, dass die drei Hauptpunkte derselben in x identisch sind mit den drei höchsten Fundamentalpunkten der gegebenen Transformation n^{ter} Ordn.[3]). Es lässt sich dann stets eine zweite Transformation p^{ter} Ordn. zwischen der Hilfsebene y und der Hauptebene z eindeutig so finden, dass die resultirende Transformation n^{ter} Ordn. zwischen x und z immer dieselbe bleibt.

Wie unschwer einzusehen ist, kann man jedoch die Zerlegung auch in umgekehrter Reihenfolge vornehmen, sobald

---

[1]) Analoge Sätze lassen sich leicht auf analytischem Wege für das Problem der Projectivität eines Strahlbüschels und eines Curvenbüschels n^{ter} Ordn. herleiten.

[2]) Rosanes, Crelle's Journal, Bd. 73. — Nöther, Math. Annalen, Bd. 3. — Clifford, vergl. die Abhandlung von Cayley in den Proceedings of the London math. Society, vol. 3.

[3]) Besitzt die aufzulösende Transformation mehr als drei höchste Fundamentalpunkte, z. B. einen r_1-fachen und $\alpha : r_2$-fache Punkte, wo $r_1 \geqq r_2$ und $\alpha > 2$ sein möge, so ist es gleichgültig, welche zwei von den αPunkten r_2 man ausser dem Punkte r_1 zu Hauptpunkten der quadratischen Hilfstransformation nimmt.

man vorher die Natur der Hilfstransformation p^{ter} Ordn. festgestellt hat, welche in Verbindung mit einer quadratischen Verwandtschaft die gegebene Transformation n^{ter} Ordn. hervorruft. Wählt man die Transformation p^{ter} Ordn. alsdann derartig, dass die Fundamentalpunkte in z dieser Hilfstransformation in die höchsten Fundamentalpunkte der Transformation n^{ter} Ordn. zu liegen kommen, und zwar der Reihe nach der höchste Fundamentalpunkt der Transformation p^{ter} Ordn. in den höchsten Fundamentalpunkt der Transformation n^{ter} Ordn., so kann man stets eine quadratische Transformation zwischen y und x eindeutig so bestimmen, dass sich die resultirende Transformation n^{ter} Ordn. zwischen x und z nicht ändert.

Die beiden hier angegebenen Zerlegungsarten lassen unmittelbar die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

I. Sind von einer Cremona'schen Transformation n^{ter} Ordn. solche Angaben gemacht, dass dadurch die Fundamentalpunkte der ersetzenden quadratischen Verwandtschaft in der einen Hauptebene bekannt sind, durch Festlegung dieser Transformation aber und durch gemachte Angaben die Hilfstransformation p^{ter} Ordn. bestimmt ist, so kennt man auch die resultirende Transformation n^{ter} Ordn.

II. Sind von einer Cremona'schen Transformation n^{ter} Ordn. solche Angaben gemacht, dass dadurch die Fundamentalpunkte der ersetzenden Transformation p^{ter} Ordn. in der einen Hauptebene bekannt sind, durch Festlegung dieser Transformation aber und durch gemachte Angaben die quadratische Hilfsverwandtschaft bestimmt ist, so kennt man auch die resultirende Transformation n^{ter} Ordn.

Auf Grund des Satzes I. wird es keine Schwierigkeiten haben können, alle die Fälle zu eruiren, in denen eine Transformation n^{ter} Ordn. bestimmt ist, sobald die drei höchsten Fundamentalpunkte in der einen Ebene gegeben sind, und sobald man sämmtliche Möglichkeiten, die eine Transformation p^{ter} d. h. $\frac{n}{2}$ . . . . . $n-1^{ter}$ Ordn. festlegen, erschöpft hat.

Aus Satz II. aber folgt, dass sich das Bestimmungs-Problem einer Transformation n^{ter} Ordn. stets dann auf das-

jenige der quadratischen Verwandtschaft wird zurückführen lassen, wenn man von vornherein die π höchsten Fundamentalpunkte der Transformation n^{ter} Ordn. in der einen Ebene kennt, wo π die Anzahl der Fundamentalpunkte bezeichnet, welche die Hilfstransformation p^{ter} Ordn. in einer Ebene besitzt. —

Es soll zunächst in möglichst ausführlicher Weise die Anwendbarkeit dieser zweiten Methode an der cubischen Transformation gezeigt werden. Da sich dieselbe in eine Reihenfolge von zwei quadratischen auflösen lässt, so wollen wir uns jedoch zuvor noch einige Bemerkungen über das Bestimmungs-Problem der quadratischen Verwandtschaft gestatten.

Transformation 2^{ter} Ordn.

In den bereits erwähnten Arbeiten von Reye und Weyr finden sich folgende Sätze:

Die quadratische Transformation ist eindeutig bestimmt, wenn gegeben sind

1. die beiden Hauptdreiecke und ein Paar entsprechende Punkte;
2. zwei Hauptpunkte der einen Ebene, die beiden entsprechenden Hauptlinien und drei Punktepaare;
3. ein Paar zugeordnete Hauptpunkte, die entsprechenden Hauptlinien und drei Punktepaare;
4. zwei Paar zugeordnete Hauptpunkte und drei Punktepaare;
5. ein Hauptdreieck und vier Punktepaare;
6. ein Hauptpunkt, die entsprechende Hauptlinie und fünf Punktepaare;
7. sieben Punktepaare.

Aus den hier angeführten Sätzen ergiebt sich unmittelbar die von Reye und Weyr gemachte Bemerkung, dass das Datum eines Hauptpunktes und der entsprechenden Hauptlinie durch das zweier Punktepaare ersetzt werden kann. Die Frage nach dem Gewicht eines Hauptpunktes resp. einer Hauptlinie habe ich bisher nirgends berührt gefunden, und es hat auch den Anschein, als ob sich darüber ein allgemein gültiges Gesetz nicht aufstellen liesse. Denn dass es nicht möglich ist, schlechthin

einen Hauptpunkt resp. eine Hauptlinie, wie man vermuthen könnte, stets durch ein Punktepaar zu ersetzen, davon kann man sich leicht durch einzelne Fälle überzeugen. So ist z. B. die Transformation festgelegt durch zwei Hauptpunkte der einen Ebene und fünf Punktepaare, sie ist aber bereits überbestimmt, wenn man einen Hauptpunkt und sechs beliebige Punktepaare giebt.

Die grösste Gesetzmässigkeit in Betreff der Ersetzbarkeit von Hauptpunkten und Hauptlinien durch Punktepaare findet jedoch statt, sobald man auch zum Theil abhängige Punktepaare als Bestimmungsstücke für zulässig erachtet und zwei derartigen Punktepaaren das Gewicht eines unabhängigen ertheilt. Alsdann hat immer das unabhängige Datum eines Fundamentalpunktes resp. einer Fundamentalgraden das Gewicht eines unabhängigen oder zweier abhängigen Punktepaare, das Datum eines Fundamentalpunktes und der ihn enthaltenden Fundamentallinie aber das Gewicht von ein und einem halben unabhängigen oder drei abhängigen Punktepaaren, und man kann ganz allgemein den Satz aussprechen:

A. *Die bestimmenden Daten der quadratischen Transformation besitzen stets das Gesammtgewicht von sieben unabhängigen resp. vierzehn abhängigen Punktepaaren.*

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich in jedem einzelnen Falle zeigen, wenn man erwägt, dass die Eckpunkte der beiden Hauptdreiecke der Transformation — wir wollen die der Ebene x mit a b c, die der Ebene y mit $\alpha\,\beta\,\gamma$ bezeichnen — die Mittelpunkte von drei Paar bezüglich projectivischen Strahlbüscheln sind. Man findet auf diese Weise, dass die quadratische Verwandtschaft eindeutig bestimmt ist durch

8. ein Hauptdreieck der einen Ebene, zwei Hauptpunkte der zweiten Ebene und zwei unabhängige Punktepaare;
9. ein Hauptdreieck der einen Ebene, einen Hauptpunkt der anderen Ebene und drei unabhängige Punktepaare;
10. zwei Hauptpunkte a und b der einen Ebene, zwei Hauptpunkte α und γ der zweiten Ebene und vier Panktepaare $\begin{matrix} x_1 \,.\, .\, x_4 \\ y_1 \,.\, .\, y_4 \end{matrix}$, von denen zwei $\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}$ völlig willkürlich sind,

die beiden anderen der Bedingung genügen

$$a\ (b\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\ \overline{\wedge}\ \alpha\ (\gamma\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4);$$

11. zwei Hauptpunkte a und b der einen Ebene, den diesen nicht zugeordneten Hauptpunkt γ der zweiten Ebene und vier unabhängige Punktepaare;

12. zwei Hauptpunkte a und b der einen Ebene, einen der diesen zugeordneten Hauptpunkte z. B. α der anderen Ebene und fünf Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots x_5 \\ y_1 \ldots y_5 \end{matrix}$, von denen drei $\begin{matrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ y_1\ y_2\ y_3 \end{matrix}$ beliebig gewählt werden können, die beiden anderen von der Relation abhängen $a\ (x_1 \ldots x_5)\ \overline{\wedge}\ \alpha\ (y_1 \ldots y_5)$;

13. zwei Hauptpunkte der einen Ebene und fünf unabhängige Punktepaare;

14. einen Hauptpunkt a der einen Ebene, einen der diesem nicht zugeordneten Hauptpunkte z. B. β der zweiten Ebene und fünf unabhängige Punktepaare;

15. einen Hauptpunkt a der einen Ebene, den diesem zugeordneten Hauptpunkt α der anderen Ebene und sieben Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_7 \\ y_1 \ldots . y_7 \end{matrix}$, von denen drei $\begin{matrix} x_1\ x_2\ x_3 \\ y_1\ y_2\ y_3 \end{matrix}$ unabhängig sind, die vier übrigen bereits die Bedingung erfüllen müssen $a\ (x_1 \ldots . x_7)\ \overline{\wedge}\ \alpha\ (y_1 \ldots . y_7)$;

16. einen Hauptpunkt a und sieben Punktepaare, von denen fünf $\begin{matrix} x_1 \ldots x_5 \\ y_1 \ldots y_5 \end{matrix}$ völlig willkürlich sind, die beiden anderen von der Beziehung abhängen

$$a\ (x_1 \ldots . x_7)\ \overline{\wedge}\ \alpha\ (y_1 \ldots . y_7).$$

Die quadratische Transformation ist ferner mehrdeutig bestimmt und zwar

17. dreideutig durch eine Hauptlinie a b und sechs beliebige Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_6 \\ y_1 \ldots . y_6 \end{matrix}$; denn da

$$a\ (x_1 \ldots . x_6)\ \overline{\wedge}\ \alpha\ (y_1 \ldots . y_6) \text{ und}$$
$$b\ (x_1 \ldots . x_6)\ \overline{\wedge}\ \beta\ (y_1 \ldots . y_6)$$

sein muss, so liegen die Hauptpunkte a und b auf einer bekannten Curve 3ter Ordn., welche durch die Punkte $x_1 \ldots . x_6$ geht, und deren drei Schnittpunkte mit der

gegebenen Hauptlinie a b in dreifach verschiedener Weise zu je zweien combinirt werden können;

18. zweideutig durch den Hauptpunkt a, die ihn enthaltende Hauptlinie a b und sechs Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_6 \\ y_1 \ldots . y_6 \end{matrix}$, von denen fünf völlig willkürlich sind, das sechste $\begin{matrix} x_6 \\ y_6 \end{matrix}$ aber bereits der Bedingung genügt a $(x_1 \ldots . x_5\, x_6)\ \overline{\wedge}\ \alpha\ (y_1 \ldots . y_5\, y_6)$; da nämlich auch b $(x_1 \ldots . x_6)\ \overline{\wedge}\ \beta\ (y_1 \ldots . y_6)$ sein muss, so liegt Punkt b auf einer bestimmten Curve 3ter Ordn., welche die Punkte a $x_1 \ldots . x_6$ enthält und von der Graden a b in zwei freien Punkten b_1 und b_2 getroffen wird;

19. zehndeutig durch die Hauptlinie a b, die Hauptlinie $\alpha\beta$ und fünf beliebige Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_5 \\ y_1 \ldots . y_5 \end{matrix}$; denn bewegt sich der Mittelpunkt a resp. b eines Strahlbüschels a $(x_1 \ldots . x_5)$ resp. b $(x_1 \ldots x_5)$ auf einer bekannten Graden a b, so beschreibt nach Sturm (Math. Annalen Band 1 pag. 536) der Mittelpunkt α resp. β des projectivischen Strahlbüschels $\alpha\ (y_1 \ldots . y_5)$ resp. $\beta\ (y_1 \ldots . y_5)$ eine gewisse Curve 5ter Ordn. Letztere hat aber mit der gegebenen Hauptlinie $\alpha\beta$ im Allgemeinen fünf Punkte gemein, die sich in zehnfach verschiedener Weise zu je zwei Punkten α und β combiniren lassen. —

Von allen weiteren Fällen, in denen die quadratische Verwandschaft durch Fundamentalpunkte, Fundamentallinien und Punktepaare bestimmt erscheint, wollen wir hier der Kürze wegen nur noch einen Fall erwähnen, der dadurch ein besonderes Interesse gewinnt, dass die Art der Abhängigkeit eines Bestimmungsstückes wesentlich verschieden ist von der, welche in den bisherigen Beispielen statt hatte.

Sind nämlich zwei Hauptpunkte a und b und die Hauptlinie b c der Ebene x, ausserdem aber vier unabhängige Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_4 \\ y_1 \ldots . y_4 \end{matrix}$ gegeben, so reichen diese Daten, welche ein Gesammtgewicht von dreizehn abhängigen Punktepaaren repräsentiren, noch nicht aus, um die Transformation zu be-

stimmen. Unserem Satz A. zu Folge würde es zu diesem Zweck noch der Annahme eines fünften, bereits abhängigen Punktepaares $\begin{matrix} x_5 \\ y_5 \end{matrix}$ bedürfen. Es frägt sich, welcher Bedingung muss das Punktepaar $\begin{matrix} x_5 \\ y_5 \end{matrix}$ bereits genügen, oder mit anderen Worten, welches ist der geometrische Ort aller Punkte y_5, die einem beliebigen Punkte x_5 auf Grund der gemachten Angaben entsprechen? Um dies zu entscheiden, fixiren wir auf der Graden b c einen willkürlichen Punkt c^1. Alsdann bestimmen die Hauptpunkte a b c^1 und die vier Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots x_4 \\ y_1 \ldots y_4 \end{matrix}$ eindeutig eine quadratische Verwandtschaft zwischen x und y. Vermöge derselben wird dem Punkte x_5 ein Punkt y_5^1 zugeordnet, dessen Construction sich aus den Relationen

$$[a\,b\,c^1\,x_1]\ (x_2\ x_3\ x_4\ x_5) \barwedge y_1\ (y_2\ y_3\ y_4\ y_5^1) \text{ und}$$
$$[a\,b\,c^1\,x_2]\ (x_1\ x_3\ x_4\ x_5) \barwedge y_2\ (y_1\ y_3\ y_4\ y_5^1)$$

ergiebt.

Dem analog finden wir für einen zweiten Punkt c^2 der Graden b c mit Hilfe der beiden Beziehungen

$$[a\,b\,c^2\,x_1]\ (x_2\ x_3\ x_4\ x_5) \barwedge y_1\ (y_2\ y_3\ y_4\ y_5^2) \text{ und}$$
$$[a\,b\,c^2\,x_2]\ (x_1\ x_3\ x_4\ x_5) \barwedge y_2\ (y_1\ y_3\ y_4\ y_5^2)$$

eindeutig einen Punkt y_5^2 als dem Punkte x_5 entsprechend.

Fahren wir in dieser Weise fort, indem wir den Punkt c continuirlich die Grade b c durchlaufen lassen, so erhalten wir zwei Strahlbüschel

$$y_1\ (y_5^1\ y_5^2 \ldots . y_5^n)$$
$$\text{und } y_2\ (y_5^1\ y_5^2 \ldots . y_5^n),$$

von denen das erste offenbar zu dem Kegelschnittbüschel

$$[a\,b\ x_1\ x_5]\ (c^1\ c^2 \ldots . c^n),$$

das letztere aber zu dem Kegelschnittbüschel

$$[a\,b\ x_2\ x_5]\ (c^1\ c^2 \ldots . c^n)$$

projectivisch ist.

Es muss aber

$$[a\,b\ x_1\ x_5]\ (c^1\ c^2 \ldots . c^n) \barwedge [a\,b\ x_2\ x_5]\ (c^1\ c^2 \ldots . c^n)$$

sein, denn beide Büschel sind zu der graden Punktreihe $c^1\ c^2 \ldots . c^n$ projectivisch; mithin ist auch

$$y_1\ (y_5^1\ y_5^2 \ldots . y_5^n) \barwedge y_2\ (y_5^1\ y_5^2 \ldots . y_5^n).$$

Die Punkte $y_5^1\ y_5^2\ \ldots$ liegen also sämmtlich auf einem Kegelschnitt, der durch y_1 und y_2 geht.

Dass derselbe auch die Punkte y_3 und y_4 enthält, davon überzeugt man sich leicht, wenn man die Rolle, welche die Punkte y_1 und y_2 bisher spielten, den Punkten y_3 und y_4 zuertheilt und die angestellte Betrachtung für diesen Fall wiederholt. — Nehmen wir auf dem so gefundenen Kegelschnitt einen beliebigen Punkt y_5 als dem gegebenen Punkt x_5 entsprechend an, so ist dadurch unsere quadratische Verwandtschaft eindeutig bestimmt. —

Transformation 3ter Ordn.

§ 1.

Besteht zwischen den Ebenen x und y eine quadratische Verwandtschaft I, und sind a b c die Hauptpunkte in x und $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Hauptpunkte in y; besteht ferner zwischen den Ebenen y und z eine quadratische Transformation II, und heissen $\rho\ \sigma\ \tau$ die Hauptpunkte in y und R S T die Hauptpunkte in z; denkt man sich endlich die Punkte α und ρ in einen Punkt $\overset{\alpha}{\rho}$ zusammenfallend, so vermitteln die Transformationen I und II eine cubische Verwandtschaft zwischen x und z. Vermöge I sollen den Punkten σ und τ in y die Punkte s und t in x, vermöge II den Punkten β und γ in y die Punkte B und C in z entsprechen. Die Punkte $\overset{2}{a}$ b c s t sind alsdann die Fundamentalpunkte der cubischen Transformation in x, während $\overset{2}{R}$ S T B C die Fundamentalpunkte der Ebene Z repräsentiren, und zwar sind $\overset{2}{a}$ und $\overset{2}{R}$ die in x resp. z auftretenden Doppelpunkte.

Einer beliebigen Graden in x entspricht nämlich vermöge I in y ein Kegelschnitt, der durch $\overset{\alpha}{\rho}\ \beta\ \gamma$ geht, letzterem aber vermöge II in z eine Curve 3ter Ordn., die R zum Doppelpunkt und S T B C zu einfachen Punkten hat. Umgekehrt ist einer Graden in z vermöge II und I eine Curve 3ter Ordn. in x zugeordnet, welche durch a zweimal, durch b c s t je einmal geht. Dem Durchschnitt zweier Graden der einen Ebene

entspricht der einzige freie Schnittpunkt der jenen Graden zugeordneten Curven 3ter Ordn. der anderen Ebene, einem Punkte also im Allgemeinen eindeutig ein Punkt. Ausgenommen sind allein die Fundamentalpunkte. Es entspricht nämlich:

dem Punkte a in x die Grade $\beta\gamma$ in y, dieser Graden der Kegelschnitt durch die Punkte R S T B C in z,

dem Punkte b in x die Grade $\overset{\alpha}{\rho}\gamma$ in y, dieser Graden die Grade R C in z,

dem Punkte c in x die Grade $\overset{\alpha}{\rho}\beta$ in y, dieser Graden die Grade R B in z,

dem Punkte s in x der Punkt σ in y, diesem Punkte die Grade R T in z,

dem Punkte t in x der Punkt τ in y, diesem Punkte die Grade R S in z;

umgekehrt entspricht:

dem Punkte R in z die Grade $\sigma\tau$ in y, dieser Graden der Kegelschnitt durch die Punkte a b c s t in x,

dem Punkte S in z die Grade $\overset{\alpha}{\rho}\tau$ in y, dieser Graden die Grade a t in x,

dem Punkte T in z die Grade $\overset{\alpha}{\rho}\sigma$ in y, dieser Graden die Grade a s in x,

dem Punkte B in z der Punkt β in y, diesem Punkte die Grade a c in x,

dem Punkte C in z der Punkt γ in y, diesem Punkte die Grade a b in x.

Einem Strahlbüschel der einen Ebene entspricht im Allgemeinen ein projectivisches Curvenbüschel 3ter Ord. der anderen Ebene, so dass, wenn die Punkte X $x_1 \ldots . x_n$ den resp. Punkten Z $z_1 \ldots . z_n$ zugeordnet sind, stets die Relationen bestehen müssen $Z(z_1 \ldots\ldots z_n) \overline{\wedge}^{2} [a\ b\ c\ s\ t\ X] (x_1 \ldots . x_n)$

und $X(x_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge}^{2} [R\ S\ T\ B\ C\ Z] (z_1 \ldots . z_n)$.

Den fünf besonderen Strahlen Z (R S T B C) resp. X (a b c s t) sind fünf zerfallende Curven 3ter Ordn. zugeordnet, und zwar

entspricht dem Strahle ZR eine aus der Graden aX und dem Fundamentalkegelschnitt der Ebene x bestehende Curve; dem Strahle ZS eine Curve, welche in die Grade at und in den durch abcsX gehenden Kegelschnitt zerfällt etc. etc.

Wählt man nicht einen beliebigen Punkt X resp. Z zum Mittelpunkt eines Strahlbüschels, sondern der Reihe nach die Fundamentalpunkte der einen oder der anderen Ebene, so erniedrigt sich der Grad des entsprechenden Curvenbüschels 3ter Ordn. um eine resp. zwei Einheiten, indem gewisse Fundamentallinien — Grade oder Kegelschnitt — allen Curven des Büschels gemeinsam sind, und wir finden

1. $a(x_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots\ldots z_n)$
2. $b(x_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge} [RSTB]\ (z_1 \ldots\ldots z_n)$
3. $c(x_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge} [RSTC]\ (z_1 \ldots\ldots z_n)$
4. $s(x_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge} [RBCS]\ (z_1 \ldots\ldots z_n)$
5. $t(x_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge} [RBCT]\ (z_1 \ldots\ldots z_n)$
6. $S(z_1 \ldots\ldots z_n) \overline{\wedge} [abcs]\ (x_1 \ldots\ldots x_n)$
7. $T(z_1 \ldots\ldots z_n) \overline{\wedge} [abct]\ (x_1 \ldots\ldots x_n)$
8. $B(z_1 \ldots\ldots z_n) \overline{\wedge} [astb]\ (x_1 \ldots\ldots x_n)$
9. $C(z_1 \ldots\ldots z_n) \overline{\wedge} [astc]\ (x_1 \ldots\ldots x_n)$.

Bei diesen Projectivitäten 1. . . . . 9. haben wir wiederum zu beachten, dass die auftretenden Strahlbüschel vier singuläre Strahlen enthalten: die von einem Fundamentalpunkt der einen Ebene nach den vier übrigen Fundamentalpunkten derselben Ebene gerichteten Strahlen. Diesen werden natürlich auch vier besondere Curven — Grade oder Kegelschnitt — entsprechen. Wie man sich leicht mit Hilfe der angegebenen Zerlegung der cubischen Transformation in zwei quadratische überzeugen kann, muss z. B. $a(bcst) \overline{\wedge} R(CBTS)$ sein, so dass wir die Beziehung 1. vollständiger so schreiben können

$$a(bcstx_1 \ldots\ldots x_n) \overline{\wedge} R(CBTSZ_1 \ldots\ldots z_n),$$

eine Relation, welche uns eine gewisse Zuordnung der einfachen Fundamentalpunkte gestattet, nämlich

b zu C
c = B
s = T
t = S.

In Betreff der Projectivitäten 2. . . . . 9. bemerken wir,

dass dem von einem einfachen Fundamentalpunkt nach dem Doppelpunkt gehenden Strahle der einen Ebene stets der Fundamentalkegelschnitt der zweiten Ebene projectivisch entsprechen muss; den nach den drei anderen, einfachen Fundamentalpunkten gerichteten Strahlen aber die drei zerfallenden Kegelschnitte des betreffenden Büschels. So ist z. B. dem Strahle SR des Büschels $S(z_1 \ldots . z_n)$ der Fundamentalkegelschnitt der Ebene x zugeordnet, während den Strahlen S(TBC) die zerfallenden Kegelschnitte

$$as.bc$$
$$bs.ac$$
$$cs.ab$$

des Büschels [abcs] entsprechen.

§ 2.

Es sollen jetzt die Fälle eine Erledigung finden, in denen sich unter den Bestimmungsstücken der cubischen Transformation von Fundamentalpunkten wenigstens der Doppelpunkt und zwei einfache Fundamentalpunkte der einen Ebene befinden.

Erster Fall.

Wir beginnen damit, dass von vornherein sämmtliche Hauptpunkte einer Ebene z. B. die Punkte $\overset{2}{a}bcst$ gegeben sind. Um zu erkennen, welche weitere Annahmen zur Festlegung der Transformation nöthig sind, wählen wir eine quadratische Hilfstransformation zwischen x und y so, dass a der eine Hauptpunkt und irgend zwei der Punkte bcst z. B. b und c die beiden anderen Hauptpunkte in x sind. Die beliebig in y anzunehmenden Hauptpunkte mögen $\overset{\alpha}{\underset{\rho}{}}\beta\gamma$ heissen. Construirt man alsdann vermöge dieser Verwandtschaft zu s und t die entsprechenden Punkte σ und τ in y, so kennt man von der zweiten quadratischen Hilfstransformation zwischen y und z die Hauptpunkte $\overset{\alpha}{\underset{\rho}{}}\sigma\tau$ in y. Dieselbe wird mithin bestimmt sein, sobald noch vier Paar entsprechende Punkte $\begin{matrix} y_1 & . & . & y_4 \\ z_1 & . & . & z_4 \end{matrix}$ be-

kannt sind. Dies aber wird der Fall sein, wenn $\begin{matrix} x_1 \ldots x_4 \\ z_1 \ldots z_4 \end{matrix}$ als zugeordnete Punkte der cubischen Transformation gegeben sind. Denn dann können vermöge der Hilfstransformation zwischen x und y zu den Punkten $x_1 \ldots x_4$ die resp. zugeordneten Punkte $y_1 \ldots y_4$ gefunden werden, welche vermöge der zweiten ersetzenden Transformation den Punkten $z_1 \ldots z_4$ entsprechen müssen. Mithin ist die cubische Transformation bestimmt durch sämmtliche Fundamentalpunkte der einen Ebene und vier Punktepaare.

Dass eins dieser Punktepaare durch den Fundamentalpunkt B, ein zweites durch den Fundamentalpunkt C ersetzt werden kann, ist evident. Vermöge der Transformation zwischen y und z entsprechen ja den Punkten B und C die resp. bekannten Punkte β und γ. Sind also B und C gegeben, so kennt man damit zwei Punktepaare (B und β, resp. C und γ) dieser Hilfstransformation.

Doch auch jeder der Fundamentalpunkte $\overset{2}{R}$, S, T hat als Datum den Werth eines Punktepaares, wie man unmittelbar aus den vorausgeschickten Sätzen 1, 8 und 9 über die quadratische Transformation (pag. 7 und 8) ersehen kann. Es lässt sich demnach folgender Satz aussprechen:

a. Befinden sich unter den Bestimmungsstücken einer Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. die sämmtlichen Fundamentalpunkte der einen Ebene, so müssen alle weiteren Daten von Punktepaaren und Fundamentalpunkten der zweiten Ebene, die zur Festlegung der Transformation nöthig sind, das Gesammtgewicht von vier unabhängigen Punktepaaren besitzen[1]). —

Zweiter Fall.

Es seien jetzt die Fundamentalpunkte der einen Ebene ausser einem einfachen z. B. die Punkte $\overset{2}{a}bcs$ von vornherein gegeben.

Wir verfahren alsdann wie in dem vorhergehenden Falle

[1]) Dieser Satz gilt für jede Cremona'sche Transformation nter Ordn.

und wählen zunächst eine quadratische Verwandtschaft zwischen x und y so, dass a der eine Hauptpunkt und irgend zwei der Punkte b c s, z. B. b und c, die beiden anderen Hauptpunkte der Ebene x sind, während die willkürlich in y anzunehmenden Hauptpunkte wiederum $\begin{matrix}\alpha\\ \rho\end{matrix}\beta\gamma$ heissen sollen. Entspricht vermöge dieser Transformation dem Punkte s in x der Punkt σ in y, so sind von der zweiten Hilfstransformation zwischen y und z die beiden Hauptpunkte $\begin{matrix}\alpha\\ \rho\end{matrix}$ und σ der Ebene y bekannt. Letztere Verwandtschaft wird mithin bestimmt sein, sobald man noch fünf Paar entsprechende Punkte $\begin{matrix}y_1 \ldots y_5\\ z_1 \ldots z_5\end{matrix}$ kennt, was der Fall sein wird, wenn die Punktepaare $\begin{matrix}x_1 \ldots x_5\\ z_1 \ldots z_5\end{matrix}$ gegeben sind. Durch Annahme derselben wird somit auch die cubische Transformation festgelegt. —

Was das Gewicht der Fundamentalpunkte in der z-Ebene betrifft, so ist offenbar, dass auch hier ein Punktepaar durch den Punkt B, ein zweites durch den Punkt C ersetzt werden kann. Dass auch Punkt T den Werth eines Punktepaares repräsentirt, folgt aus dem Satze 11 pag. 9, nach welchem die quadratische Transformation zwischen y und z bestimmt ist durch die beiden Hauptpunkte $\begin{matrix}\alpha\\ \rho\end{matrix}$ und σ der Ebene y, den diesen nicht zugeordneten Fundamentalpunkt T und vier Punktepaare. Nach Satz 12 pag. 9 wird die ersetzende quadratische Transformation ferner festgelegt durch die Annahme von S und fünf Punktepaaren $\begin{matrix}y_1 \ldots y_5\\ z_1 \ldots z_5,\end{matrix}$ von denen drei $\begin{matrix}y_1\ y_2\ y_3\\ z_1\ z_2\ z_3\end{matrix}$ völlig willkürlich sind, die beiden anderen aber bereits der Bedingung genügen $\sigma(y_1 \ldots y_5) \overline{\wedge} S(z_1 \ldots z_5)$.

Diese Beziehung wird stets stattfinden, wenn fünf Punktepaare der cubischen Transformation so gegeben sind, dass

$$S(z_1 \ldots z_5) \overline{\wedge} [a\,b\,c\,s]\ (x_1 \ldots x_5)$$

ist, und unsere Transformation 3ter Ordn. wird mithin bestimmt sein, sobald man ausser den Fundamentalpunkten $\begin{matrix}2\\ a\,b\,c\,s\end{matrix}$
$\begin{matrix}2\end{matrix}$

der einen Ebene den einfachen Fundamentalpunkt S der zweiten Ebene und fünf Punktepaare kennt, von denen drei völlig willkürlich sind, die beiden anderen von obiger Relation abhängen.

Ertheilen wir, wie dies bei der quadratischen Transformation geschah, einem unabhängigen Punktepaar das Gewicht zweier abhängigen, so wird jenes Datum von fünf besonderen Punktepaaren offenbar das Gewicht von acht abhängigen besitzen. Die Transformation war aber auch bestimmt durch die Punkte $\overset{2}{a}\,b\,c\,s$ und fünf unabhängige Punktepaare, d. h. durch $\overset{2}{a}\,b\,c\,s$ und zehn abhängige Punktepaare. Der Fundamentalpunkt S hat somit das Gewicht von zwei abhängigen Punktepaaren. —

Ist endlich der Doppelpunkt R gegeben, so wird die Hilfstransformation zwischen y und z festgelegt sein, wenn ausserdem noch fünf Punktepaare $\begin{matrix} y_1 \dots y_5 \\ z_1 \dots z_5 \end{matrix}$ bekannt sind, welche die Bedingung erfüllen $\overset{\alpha}{\underset{\rho}{}}(y_1 \dots y_5) \barwedge R(z_1 \dots z_5)$.

Die cubische Transformation findet sich folglich bestimmt durch die Fundamentalpunkte $\overset{2}{a}\,b\,c\,s$ der einen Ebene, den Doppelpunkt R der zweiten Ebene und fünf Punktepaare, von denen drei ganz beliebig sind, die beiden anderen aber so gewählt werden müssen, dass $a(x_1 \dots x_5) \barwedge R(z_1 \dots z_5)$ ist.

Es hat demnach auch der Doppelpunkt R als Datum das Gewicht von zwei abhängigen Punktepaaren. —

In derselben Weise, wie dies bisher geschehen ist, lässt sich für jeden einzelnen Fall folgender Satz beweisen:

b. Befinden sich unter den Bestimmungsstücken einer Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. der Doppelpunkt und drei einfache Fundamentalpunkte der einen Ebene, so müssen alle weiteren Daten von Punktepaaren resp. Fundamentalpunkten der zweiten Ebene, die zur Festlegung der Transformation nöthig sind, stets das Gesammtgewicht von fünf unabhängigen oder zehn abhängigen Punktepaaren besitzen.

Die hier auftretenden Möglichkeiten wollen wir noch kurz zusammenstellen.

Die cubische Transformation ist eindeutig bestimmt, wenn ausser den Punkten $\overset{2}{a}bcs$ gegeben sind

1. 5 Punktepaare (5 unabh.).
2. 4 " (4 ") und der Punkt B, C oder T.
3. 5 " (3 ") " " " S oder $\overset{2}{R}$.
4. 3 " (3 ") und die Punkte BC, BT, CT oder $\overset{2}{R}S$.
5. 4 " (2 ") " " " BS, CS, TS, $\overset{2}{R}B$, $\overset{2}{R}C$ oder $\overset{2}{R}T$.
6. 2 " (2 ") " " " BCT, $\overset{2}{R}BS$, $\overset{2}{R}CS$ oder $\overset{2}{R}TS$.
7. 3 " (1 ") " " " BCS, BTS, CTS, $\overset{2}{R}BC$, $\overset{2}{R}BT$ oder $\overset{2}{R}CT$.
8. 2 " (0 ") " " " BCST oder $\overset{2}{R}BCT$.
9. 1 " (1 ") " " " $\overset{2}{R}BCS$, $\overset{2}{R}BTS$ oder $\overset{2}{R}CTS$.

Dritter Fall.

Sind die Fundamentalpunkte der einen Ebene ausser zwei einfachen, z. B. die Punkte $\overset{2}{a}bc$ von vornherein gegeben, so können wir ganz analog den Fällen I. und II. dieses Paragraphen vermittelst der Zerlegung der cubischen Transformation in zwei quadratische, die Richtigkeit des folgenden Satzes zeigen:

c. Befinden sich unter den Bestimmungsstücken einer Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. der Doppelpunkt und zwei einfache Fundamentalpunkte der einen Ebene, so müssen alle weiteren Daten von Punktepaaren resp. Fundamentalpunkten der zweiten Ebene, die zur Festlegung der Transformation nöthig sind, stets das Gesammtgewicht von sechs unabhängigen oder zwölf abhängigen Punktepaaren besitzen.

Wir finden auf diese Weise die cubische Transformation

eindeutig bestimmt, wenn ausser den Punkten $\overset{2}{a}bc$ gegeben sind

1. 7 Punktepaare (5 unabh.).
2. 5 = (5 =) und der Punkt S oder T.
3. 6 = (4 =) = = = B oder C.
4. 7 = (3 =) = = = $\overset{2}{R}$.
5. 5 = (3 =) und die Punkte BC, $\overset{2}{R}S$ oder $\overset{2}{R}T$.
6. 4 = (4 =) = = = ST, SB, SC, TB oder TC.
7. 6 = (2 =) = = = $\overset{2}{R}B$ oder $\overset{2}{R}C$.
8. 3 = (3 =) = = = STB, STC, BCS, BCT oder $\overset{2}{R}ST$.
9. 4 = (2 =) = = = $\overset{2}{R}SB$, $\overset{2}{R}SC$, $\overset{2}{R}TB$ oder $\overset{2}{R}TC$.
10. 5 = (1 =) = = = $\overset{2}{R}BC$.
11. 2 = (2 =) = = = BCST.

Uebersehen wir die eruirten Möglichkeiten der Fälle I, II und III, so ergiebt sich, dass ein beliebiger Fundamentalpunkt der Ebene z stets das Gewicht eines unabhängigen oder zweier abhängigen Punktepaare hat. Wie leicht zu bemerken, können ohne Ausnahme ein unabhängiges Punktepaar nur jene einfachen Fundamentalpunkte der Ebene z ersetzen, von denen von vornherein die zugeordneten Fundamentalpunkte der Ebene x gegeben sind. Im Fall I, wo wir sämmtliche Fundamentalpunkte der letzteren Ebene als bekannt voraussetzten, hatte demgemäss jeder Fundamentalpunkt der Ebene z das directe Gewicht eines unabhängigen Punktepaares. Im Fall II waren es allein die Punkte C, B und T, die den gegebenen Punkten b, c, s zugeordnet sind; im Fall III endlich die den gegebenen Punkten b und c zugeordneten Fundamentalpunkte C und B, welchen stets diese Eigenschaft zukam.

Die übrigen Fundamentalpunkte der Ebene z (im Fall II: $\overset{2}{R}$ und S, im Fall III: $\overset{2}{R}$, S und T) konnten im Allgemeinen

nicht durch ein unabhängiges Punktepaar ersetzt werden. Um ein Maass für das Gewicht derselben zu gewinnen, sahen wir uns genöthigt, zu dem Hilfsmittel von theilweis abhängigen Punktepaaren zu greifen.

Die angeführten Fälle gestatten übrigens auch einen Schluss auf die Ersetzbarkeit der Fundamentalpunkte der Ebene x. Während nämlich im Fall I die Transformation durch die Daten $a^2 b c s t$ und vier beliebige Punktepaare bestimmt war, legten im Fall II die Fundamentalpunkte $a^2 b c s$ und fünf beliebige Punktepaare die Verwandtschaft fest, im Fall III dagegen genügten zur Bestimmung die Fundamentalpunkte $a^2 b c$ und sieben Punktepaare, von denen fünf völlig willkürlich gewählt werden konnten.

Für das Gewicht der Fundamentalpunkte s und t folgt hieraus, dass dasselbe gleich ist dem eines unabhängigen oder zweier abhängigen Punktepaare. — Es lässt sich hiernach bereits voraussehen, dass die Fundamentalpunkte der x-Ebene derselben Gesetzmässigkeit in Betreff ihrer Ersetzbarkeit durch Punktepaare unterworfen sein werden, als die der z-Ebene, so dass der allgemeine Satz bestehen wird:

B. *Ertheilt man einem beliebigen Fundamentalpunkte der Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. das Gewicht eines unabhängigen resp. zweier abhängigen Punktepaare, so müssen stets die Daten von Punktepaaren und Fundamentalpunkten, welche die Transformation festlegen, das Gesammtgewicht von neun unabhängigen oder achtzehn abhängigen Punktepaaren besitzen.*

Die Gültigkeit dieses Satzes in den wichtigsten, bisher noch nicht behandelten Fällen zu zeigen, soll zunächst der Zweck der nachfolgenden Untersuchung sein.

§ 3.

Wir hatten bereits in der Einleitung hervorgehoben, dass sich das Bestimmungs-Problem der cubischen Transformation stets auf zwei andere Probleme von elementarem Charakter zurückführen lässt, nämlich auf das bekannte Problem der

Homographie und auf die bisher nur theilweise behandelte Aufgabe: Die Projectivität eines Strahlbüschels und eines Kegelschnittbüschels durch gewisse Daten festzulegen.

Die auf pag. 3 und 4 angeführten Sätze werden für unseren Zweck nur dann benützt werden können, wenn sich unter den Bestimmungsstücken der Transformation wenigstens ein einfacher Fundamentalpunkt befindet, denn nur dann ist der Mittelpunkt eines Strahlbüschels bekannt, welches einem Kegelschnittbüschel projectivisch zugeordnet ist. Es wird sich demnach die Hauptaufgabe: die cubische Verwandtschaft allein durch Punktepaare festzulegen, mit Hilfe jener Sätze nicht lösen lassen. Um diesen Fall zu behandeln, scheint es nöthig zu sein, zuvor das Problem der Projectivität eines Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt nicht gegeben ist, und eines Kegelschnittbüschels zu erledigen. Ich werde jedoch der Kürze wegen vorziehen, einen einfacheren, dem Wesen der Transformation näherliegenden Weg einzuschlagen und will zunächst eine Lösung obiger Hauptaufgabe geben.

I. Wenn der auf pag. 21 ausgesprochene Satz B richtig ist, dass die festlegenden Daten der Cremona'schen Verwandtschaft 3^{ter} Ordn. stets das Gesammtgewicht von neun unabhängigen oder achtzehn abhängigen Punktepaaren besitzen müssen, so lässt sich von vornherein absehen, dass unsere Transformation durch elf Punktepaare bestimmt sein wird, von denen sieben völlig willkürlich gewählt werden können. Denn dass sich unter den Bestimmungsstücken höchstens sieben unabhängige Punktepaare befinden dürfen, folgt aus der Relation

$$a(x_1 \ldots\ldots x_7) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots\ldots z_7)$$

und dem Satz I. Nr. 4, pag. 4, nach welchem die Punkte a und R bereits in dreideutiger Weise ausgezeichnet sind, sobald man sieben beliebige Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots\ldots x_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$ kennt. Da das Gewicht derselben gleich dem von vierzehn abhängigen Punktepaaren ist, so werden mithin noch vier abhängige, im Ganzen also elf Punktepaare zur Bestimmung nöthig sein. — Wir können dies folgendermassen direct zeigen:

Beweis. Es seien $\begin{matrix} x_1 \ldots\ldots x_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$ die beliebig anzunehmenden

Punktepaare, ferner a und R eins der drei Doppelpunktpaare, welche durch $\begin{matrix} x_1 \ldots\ldots x_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$ bestimmt sind, und endlich $\begin{matrix} x_8\ x_9\ x_{10}\ x_{11} \\ z_8\ z_9\ z_{10}\ z_{11} \end{matrix}$ vier weitere Paare zugeordneter Punkte, welche der Bedingung genügen

$$a(x_1 \ldots\ldots x_7 \ldots x_{11}) \barwedge R(z_1 \ldots\ldots z_7 \ldots z_{11}).$$

Entspricht vermöge der gesuchten Transformation dem beliebig in der z-Ebene gewählten Punkte Z der Punkt X in der Ebene x, so muss jetzt die Beziehung bestehen

$$Z(z_1 \ldots\ldots z_{11}) \barwedge \overset{2}{[}abcstX] \ (x_1 \ldots\ldots x_{11}),$$

und zwar muss dem Strahle ZR diejenige Curve 3ter Ordn. entsprechen, welche in die Grade aX und den Fundamentalkegelschnitt der Ebene x zerfällt. Letzterer geht durch den bereits gefundenen Punkt a und die noch unbekannten Fundamentalpunkte b c s t, die Gleichung desselben wird deshalb in der Form geschrieben werden können

$$f = \varkappa_1 \psi_1 + \ldots \varkappa_5 \psi_5 = 0,$$

wo $\psi_1 \ldots \psi_5$ fünf beliebige Kegelschnitte darstellen, die den Punkt a gemein haben, $\varkappa_1 \ldots \varkappa_5$ aber fünf unbekannte Grössen bedeuten. Ist $p_x = 0$ die Gleichung der bekannten Graden aX — die Kenntniss dieser Graden ergiebt sich aus der Relation $a(Xx_1 \ldots\ldots) \barwedge R(Zz_1 \ldots\ldots)$ —, so besitzt also die dem Strahle ZR zugeordnete Curve 3ter Ordn. die Gleichung

$$F = f \,.\, p_x = (\varkappa_1 \psi_1 + \ldots\ldots \varkappa_5 \psi_5)\ p_x = 0.$$

Eine beliebige Curve 3ter Ordn. Φ unseres Büschels $\overset{2}{[}abcstX]$ lässt sich aber linear darstellen durch irgend sieben Curven 3ter Ordn. $\varphi_1 \ldots\ldots \varphi_7$, welche in a einen Doppelpunkt haben, und wir können deshalb setzen

$$\Phi = \varkappa_6 \varphi_1 + \ldots\ldots \varkappa_{12} \varphi_7 = 0,$$

wenn mit $\varkappa_6 \ldots\ldots \varkappa_{12}$ sieben neue Unbekannte bezeichnet werden.

Entspricht der Curve 3ter Ordn. Φ der willkürlich als bekannt anzunehmende Strahl Zz_ν, dessen Gleichung $n_z = 0$ sein möge, und ist $m_z = 0$ die Gleichung des Strahles ZR, so wird $m_z - \lambda n_z = 0$ die Gleichung unseres Strahlbüschels Z sein, und $F - \lambda \Phi = 0$ die Gleichung des ihm projectivisch zugeordneten Curvenbüschels 3ter Ordn. $\overset{2}{[}abcstX]$. Dem be-

sonderen Strahle ZR entspricht alsdann, wie verlangt, die in den Kegelschnitt f und in die Grade aX zerfallende Curve F.

Sollen jetzt die Punkte $x_1 \ldots\ldots x_{11}$ elf resp. Curven des Büschels $F - \lambda\Phi = 0$ angehören, so muss sein

$$F^{x_i} - \lambda_i \Phi^{x_i} = 0,$$

wo für i die Indices 1 ..... 11 zu setzen sind. Desgleichen haben wir, da die Punkte $z_1 \ldots\ldots z_{11}$ auf elf resp. Strahlen des Büschels $m_z - \lambda n_z = 0$ liegen, $m_{zi} - \lambda_i n_{zi} = 0$.

Eliminirt man aus diesen Ausdrücken die Parameter λ_i, so ergeben sich elf Gleichungen $F^{x_i} \cdot n_{zi} - \Phi^{x_i} \cdot m_{zi} = 0$, welche die Bedingung dafür enthalten, dass das Strahlbüschel $Z(z_1 \ldots z_{11})$ projectivisch ist mit dem Curvenbüschel 3ter Ordn.

$$\overset{2}{[}abcstX] \; (x_1 \ldots z_{11}).$$

Substituiren wir für F^{x_i} die Werthe $(x_1 \psi_1{}^{x_i} + \ldots x_5 \psi_5{}^{x_i}) p_{x_i}$, und für Φ^{x_i} die Werthe $x_6 \varphi_1{}^{x_i} + \ldots\ldots x_{12} \varphi_7{}^{x_i}$, so resultirt

$$(x_1 \psi_1{}^{x_i} + \ldots x_5 \psi_5{}^{x_i}) \; p_{x_i} \cdot n_{zi} - \\ - (x_6 \varphi_1{}^{x_i} + \ldots x_{12} \varphi_7{}^{x_i}) \; m_{zi} = 0.$$

Es sind dies elf homogene und lineare Gleichungen in Bezug auf die zwölf unbekannten $x_1 \ldots x_{12}$, und sie gestatten, wenn die Annahme der Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots x_{11} \\ z_1 \ldots z_{11} \end{matrix}$ allein von der Bedingung abhängt $a(x_1 \ldots x_{11}) \barwedge R(z_1 \ldots z_{11})$, eine eindeutige Bestimmung jener Grössen[1]).

Man kennt somit den Fundmentalkegelschnitt

$$f = x_1 \psi_1 + \ldots x_5 \psi_5 = 0$$

der Ebene x und eine Curve 3ter Ordn. $\Phi = x_6 \varphi_1 + \ldots x_{12} \varphi_7 = 0$ unseres Büschels $\overset{2}{[}abcstX]$, folglich auch die Fundamentalpunkte bcst der gesuchten Transformation, welche auf diese Weise eindeutig festgelegt ist. Zur Construction des Punktes X, welcher dem beliebigen Punkte Z vermöge der durch die elf Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots x_{11} \\ z_1 \ldots z_{11} \end{matrix}$ bestimmten cubischen Verwandtschaft entspricht, bedarf es übrigens nicht der Fundamentalpunkte bcst. Wir finden Punkt X als einzigen freien Schnittpunkt

[1]) Für speciellere Lagenbeziehungen der Punktepaare $\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$ kann es sehr wohl eintreten, dass obige Gleichungen unendlich viele Lösungen zulassen.

der bekannten Graden a X und der bestimmten Curve 3ter Ordn. $\Phi = 0$, die a zum Doppelpunkt hat. —

II. Sind von einer Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. nur zehn Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots x_{10} \\ z_1 \ldots z_{10} \end{matrix}$ gegeben, von denen wiederum nur sieben unabhängig sind, so existiren unendlich viele Transformationen 3ter Ordn., welche diesen Bedingungen genügen. Die einfachen Fundamentalpunkte der x-Ebene liegen alsdann auf einer bestimmten Curve 5ter Ordn., welche in a einen dreifachen, in $x_1 \ldots x_{10}$ einfache Punkte besitzt, während sich die einfachen Fundamentalpunkte der z-Ebene auf einer zweiten Curve 5ter Ordn. bewegen, die durch R dreimal, durch $z_1 \ldots z_{10}$ je einmal geht.

Beweis. Vermöge derselben Betrachtung, welche wir bei dem vorhergehenden Beweise anstellten, erhalten wir als Bedingung für das Bestehen der beiden Projectivitäten

$$a(x_1 \ldots x_{10}) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots z_{10})$$

$$Z(z_1 \ldots z_{10}) \overline{\wedge}^{2} [abcstX](x_1 \ldots x_{10})$$

zehn homogene und lineare Gleichungen

$$(\varkappa_1 \psi_1^{x_i} + \ldots \varkappa_5 \psi_5^{x_i})\, p_{x_i} \cdot u_{z_i} - (\varkappa_6 \varphi_1^{x_i} + \ldots \varkappa_{12} \varphi_7^{x_i})\, m_{z_i} = 0,$$

indem wir für i die Nummern 1 ... 10 zu setzen haben. Mit Hilfe dieser Gleichungen drücken wir zehn Grössen $\varkappa$, z. B. $\varkappa_1 \ldots \varkappa_{10}$ durch die beiden anderen $\varkappa_{11}$ und $\varkappa_{12}$ aus und erhalten

$$\varkappa_i = A_i \varkappa_{11} + B_i \varkappa_{12},$$

wo A_i und B_i zwanzig bekannte Functionen von x_i und z_i bedeuten. Diese Werthe $\varkappa_i$ substituiren wir in

$$f = \varkappa_1 \psi_1 + \ldots \ldots \varkappa_5 \psi_5 = 0 \text{ und}$$
$$\Phi = \varkappa_6 \varphi_1 + \ldots \ldots \varkappa_{12} \varphi_7 = 0$$

und bekommen

$$f = \varkappa_{11}(A_1 \psi_1 + \ldots A_5 \psi_5) + \varkappa_{12}(B_1 \psi_1 + \ldots B_5 \psi_5) = 0$$
$$\Phi = \varkappa_{11}(A_6 \varphi_1 + \ldots A_{10} \varphi_5 + \varphi_6) + \varkappa_{12}(B_6 \varphi_1 + \ldots B_{10} \varphi_5 + \varphi_7) = 0.$$

Bezeichnet man noch

$A_1 \psi_1 + \ldots$ mit L,
$B_1 \psi_1 + \ldots$ = M,
$A_6 \varphi_1 + \ldots$ = N,
$B_6 \varphi_1 + \ldots$ = P,

so sind also durch die gemachten Angaben von zehn Punktepaaren $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_{10} \\ z_1 \ldots . z_{10} \end{matrix}$ zwei projectivische Curvenbüschel $\varkappa_{11} L + \varkappa_{12} M = o$ von der 2ten Ordn. und $\varkappa_{11} N + \varkappa_{12} P = o$ von der 3ten Ordn. bestimmt. Die von diesen beiden Büscheln erzeugte Curve 5ter Ordn. $L . P - M . N = o$ ist offenbar der Ort für die Fundamentalpunkte b c s t. Da das Kegelschnittbüschel $\varkappa_{11} L + \varkappa_{12} M = o$ in a einen einfachen Basispunkt hat, die Basis des Curvenbüschels 3ter Ordn. $\varkappa_{11} N + \varkappa_{12} P = o$ Punkt a als Doppelpunkt enthält, so besitzt unsere Curve in a einen dreifachen Punkt. Ausserdem geht sie aber durch die Punkte $x_1 \ldots . x_{10}$ je einmal. Denn schreiben wir die Gleichung $L . P - M . N = o$ in Form der zwölfgliedrigen Determinante

$$\begin{vmatrix} \psi_1^{x_1} & . & . & . & \psi_5^{x_1}, & \lambda_1 \varphi_1^{x_1} & . & . & . & . & . & \lambda_1 \varphi_7^{x_1} \\ \psi_1^{x_2} & . & . & . & . & , & \lambda_2 \varphi_1^{x_2} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & , & . & . & . & . & . & . \\ \psi_1^{x_{10}} & . & . & . & . & , & \lambda_{10} \varphi_1^{x_{10}} & . & . & . & . & . \\ \psi_1^{x} & . & . & . & \psi_5^{x}, & & o & o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o & , & \varphi_1^{x} & . & . & . & . & \varphi_7^{x} \end{vmatrix} = o,$$

wo $-\frac{m_{z_i}}{p_{x_i} . n_{z_i}} = \lambda_i$ gesetzt ist, so überzeugt man sich leicht, dass diese Determinante verschwindet, wenn man in den beiden letzten Horizontalreihen derselben statt der Variabelen x die Coordinaten der Punkte x_i substituirt. —

Im Anschluss an die beiden in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze mögen hier noch folgende Erwähnung finden:

III. Eine Cremona'sche Transformation 3ter Ordn. ist eindeutig bestimmt, sobald man einen einfachen Fundamentalpunkt und neun Punktepaare kennt, von denen sieben unabhängig sind. —

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich auf demselben Wege darthun, auf dem wir zeigten, dass die Transformation eindeutig durch elf Punktepaare festgelegt ist; einfacher ergiebt sie sich jedoch mit Hilfe der Relationen

1) $a(x_1 \ldots\ldots) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots\ldots)$ und

2) $b(x_1 \ldots\ldots) \overline{\wedge} [RSTB] (z_1 \ldots\ldots)$

von denen die erste durch sieben Punktepaare, die zweite, wenn b der gegebene einfache Fundamentalpunkt ist, und wenn wir Punkt R aus 1. bereits gefunden haben, durch neun Punktepaare bestimmt wird (nach Satz II. Nr. 1, pag. 4).

IV. Sind von einer Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. ein einfacher Fundamentalpunkt b und acht Punktepaare gegeben, von denen sieben unabhängig sind, so existiren unendlich viele Transformationen 3ter Ordn., welche diese Daten befriedigen. Die drei einfachen Fundamentalpunkte c, s, t liegen alsdann auf einer bekannten Curve 5ter Ordn., welche durch den Doppelpunkt a der Ebene x dreimal, durch den gegebenen einfachen Fundamentalpunkt b zweimal und durch die Punkte $x_1 \ldots\ldots x_8$ je einmal geht. Der dem Punkt b zugeordnete Fundamentalpunkt C der Ebene z bewegt sich auf einer bekannten durch den Doppelpunkt R gehenden Graden, während die Fundamentalpunkte B, S, T der Ebene z eine bestimmte Curve 4ter Ordn. durchlaufen, welche in R einen Doppelpunkt und in $z_1 \ldots\ldots z_8$ einfache Punkte hat. —

Der erste Theil dieses Satzes kann wie in II. dieses Paragraphen gezeigt werden. Der zweite Theil folgt aus dem Satz II. Nr. 2, pag. 4.

V. Eine Cremona'sche Transformation 3ter Ordn. ist dreideutig bestimmt, sobald man zwei einfache Fundamentalpunkte der einen Ebene z. B. b und c und sieben beliebige Punktepaare kennt. —

Die Dreideutigkeit der Bestimmung hat ihren Grund darin, dass durch sieben willkürliche Punktepaare die Doppelpunkte der Transformation in dreideutiger Weise ausgezeichnet sind. Der weitere Beweis lässt sich wie in I dieses Paragraphen führen. Wir können jedoch auch folgenden Weg einschlagen:

Sind b und c die gegebenen einfachen Fundamentalpunkte der Ebene x, a und R eins der drei Doppelpunktpaare, welche

durch die Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots\ldots x_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$ bestimmt werden, so sehen wir a, b, c als Hauptpunkte einer quadratischen Hilfstransformation zwischen x und y an, deren beliebig in y anzunehmenden Hauptpunkte $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}\ \beta\ \gamma$ heissen mögen. Construirt man vermöge dieser Transformation zu den Punkten $x_1 \ldots\ldots x_7$ die entsprechenden Punkte $y_1 \ldots\ldots y_7$, so ist die zweite ersetzende quadratische Transformation zwischen y und z festgelegt durch die sieben Punktepaare $\begin{matrix} y_1 \ldots\ldots y_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$, mithin ist auch die resultirende cubische Verwandtschaft bekannt. q. e. d.

Es könnte scheinen, dass durch die gemachten Angaben bereits eine Ueberbestimmung eintritt. Man kennt ja von der quadratischen Transformation zwischen y und z die zugeordneten Hauptpunkte $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}$ und R, ausserdem aber sieben Punktepaare $\begin{matrix} y_1 \ldots\ldots y_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$, wodurch im Allgemeinen eine quadratische Transformation überbestimmt wird. In unserem Falle sind diese Daten jedoch nicht unabhängig. Denn es war nach Construction

$$a(x_1 \ldots\ldots x_7) \barwedge R(z_1 \ldots\ldots z_7)$$

und

$$a(x_1 \ldots\ldots x_7) \barwedge \begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}(y_1 \ldots\ldots y_7),$$

mithin ist auch $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}(y_1 \ldots\ldots y_7) \barwedge R(z_1 \ldots\ldots z_7)$, d. h. die Punkte $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}$ und R müssen stets zugeordnete Hauptpunkte einer quadratischen Transformation sein, welche die sieben Punktepaare $\begin{matrix} y_1 \ldots\ldots y_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$ festlegen.

VI. Sind von einer Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. die einfachen Fundamentalpunkte b und c der einen Ebene, ausserdem aber nur sechs Punktepaare beliebig gegeben, so bewegen sich die Doppelpunkte a und R auf zwei bekannten Curven 3ter Ordn. Nimmt man einen der Doppelpunkte, z. B. a, auf der betreffenden Curve beliebig an, so ist dadurch der zugehörige Punkt R auf der anderen Curve eindeutig bestimmt.

Die Fundamentalpunkte s und t liegen alsdann auf einer bekannten Curve 5ter Ordn., welche in a einen dreifachen Punkt, in b und c Doppelpunkte und in $x_1 \ldots x_6$ einfache Punkte besitzt. Die den Punkten b und c zugeordneten Fundamentalpunkte C und B der Ebene z liegen auf zwei bekannten, durch R gehenden Graden, während sich die Fundamentalpunkte S und T auf einer bestimmten Curve 3ter Ordn. befinden, welche durch die Punkte $Rz_1 \ldots z_6$ geht.

Beweis. Dass das Datum von sechs Punktepaaren $\begin{matrix} x_1 \ldots x_6 \\ z_1 \ldots z_6 \end{matrix}$ für die Doppelpunkte a und R zwei resp. Curven 3ter Ordn. festlegt, folgt aus der Relation

$$a(x_1 \ldots x_6) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots z_6)$$

und auf Grund des Satzes I. No. 3, pag. 4.

Nehmen wir einen beliebigen Punkt a auf der ersten Curve an, so ist dadurch offenbar der Punkt R auf der zweiten Curve eindeutig ausgezeichnet, und da

$$a(bcx_1 \ldots x_6) \wedge R(CBz_1 \ldots z_6)$$

sein muss, so liegen die Punkte C und B auf zwei bekannten durch R gehenden Strahlen.

Wir betrachten jetzt die Punkte a, b, c als Hauptpunkte einer quadratischen Hilfstransformation zwischen x und y und construiren zu $x_1 \ldots x_6$ die entsprechenden Punkte $y_1 \ldots y_6$. Von der zweiten Hilfstransformation zwischen y und z kennt man alsdann zwei zugeordnete Hauptpunkte $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}$ und R und sechs Punktepaare $\begin{matrix} y_1 \ldots y_6 \\ z_1 \ldots z_6 \end{matrix}$, und zwar besteht bereits die Beziehung $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix}(y_1 \ldots y_6) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots z_6)$.

Es muss aber auch

$$\sigma(y_1 \ldots y_6) \wedge R(z_1 \ldots z_6)$$

und $$\tau(y_1 \ldots y_6) \overline{\wedge} T(z_1 \ldots z_6)$$ sein.

Die Hauptpunkte σ und τ der Ebene y werden sich demnach auf einer bestimmten Curve 3ter Ordn. bewegen, welche die Punkte $\begin{matrix} \alpha \\ \rho \end{matrix} y_1 \ldots y_6$ enthält, während die Hauptpunkte S und T der Ebene z auf einer zweiten Curve 3ter Ordn. liegen,

die durch $Rz_1 \ldots . z_6$ geht. Vermöge der quadratischen Transformation zwischen y und x entspricht der durch die Punkte $\begin{matrix}\alpha \\ \rho\end{matrix} \sigma\tau y_1 \ldots . y_6$ gehenden Curve 3ter Ordn. in y eine Curve 5ter Ordn. in x, welche in a einen dreifachen Punkt, in b und c Doppelpunkte und in $x_1 \ldots . x_6$ einfache Punkte hat. Sie ist mithin der geometrische Ort für die Punkte s und t, welche bezüglich den Punkten σ und τ entsprechen. q. e. d.

Letztere Eigenschaft lässt sich auch mit Hilfe des in II. dieses § angewendeten Verfahrens nachweisen.

Anmerkung. Die Sätze I. bis VI. dieses § enthalten die Lösung des Problems der Projectivität eines Strahlbüschels, dessen Mittelpunkt nicht gegeben ist, und eines Kegelschnittbüschels, von dem

1) der Basispunkt a,
2) die Basispunkte a und b,
3) die Basispunkte a, b und c

bekannt sind, die gegebenen Punktepaare $\begin{matrix}x_1 \ldots . \\ z_1 \ldots .\end{matrix}$ aber bereits der Bedingung genügen

$$a(x_1 \ldots .) \barwedge R(z_1 \ldots .).$$

§ 4.

Die noch nicht behandelten Fälle, in denen eine Cremona'sche Transformation 3ter Ordn. durch Fundamentalpunkte und Punktepaare bestimmt erscheint, lassen sich sämmtlich mit Hilfe der auf pag. 3 und 4 angeführten Sätze erledigen. Um alle Möglichkeiten zu erschöpfen, würden wir am übersichtlichsten so verfahren können, dass wir, anschliessend an die Untersuchung des § 2, von vornherein 1) den Doppelpunkt und einen einfachen Fundamentalpunkt, 2) den Doppelpunkt, 3) die vier einfachen Fundamentalpunkte etc. etc. der einen Ebene als gegeben ansehen und zeigen, welche weitere Daten von Punktepaaren resp. Fundamentalpunkten der zweiten Ebene zur Festlegung der Transformation nöthig sind. Eine derartige Untersuchung würde jedoch bei der grossen Zahl von möglichen Combinationen ausserordentlich in die Breite gehen. Wir

wollen uns deshalb darauf beschränken, nur für einige Fälle die Betrachtung vollständig durchzuführen.

I. Es sind gegeben die Fundamentalpunkte $\overset{2}{a}$ und b der x-Ebene, ausserdem ein einfacher Fundamentalpunkt der z-Ebene. Es frägt sich, wie viel Punktepaare müssen wir annehmen, damit unsere Verwandtschaft bestimmt ist? Setzen wir die Richtigkeit des Satzes B. (pag. 21) voraus, so lässt sich diese Frage sehr leicht entscheiden. Da nämlich den drei gegebenen Fundamentalpunkten das Gewicht von sechs abhängigen Punktepaaren zukommt, so werden jenem Satze nach noch sechs unabhängige resp. zwölf abhängige Punktepaare zur Festlegung erforderlich sein. Unter letzteren können sich, wenn der gegebene einfache Fundamentalpunkt der Ebene z Punkt C ist, welcher dem Punkte b zugeordnet ist, wegen der Relation

$$a(b\,x_1 \ldots x_4) \barwedge R(C\,z_1 \ldots z_4)$$

höchstens vier unabhängige Punktepaare $\begin{smallmatrix} x_1 \ldots x_4 \\ z_1 \ldots z_4 \end{smallmatrix}$ befinden. Diese repräsentiren aber einen Werth von acht abhängigen Punktepaaren, so dass wir noch über $12 - 8 = 4$ abhängige Punktepaare zu verfügen haben. Die Transformation wird mithin durch die Fundamentalpunkte $\overset{2}{a}$, b und C und acht Punktepaare festgelegt werden, von denen vier völlig willkürlich sind.

Beweis. Aus der Beziehung

$$a(b\,x_1 \ldots x_4) \barwedge R(C\,z_1 \ldots z_4)$$

ergiebt sich in bekannter Weise eindeutig die Construction des Punktes R. Sind jetzt vier Punktepaare $\begin{smallmatrix} x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \end{smallmatrix}$ so gewählt, dass

$$a(b\,x_1 \ldots x_4 \ldots x_8) \barwedge R(C\,z_1 \ldots z_4 \ldots z_8)$$

ist, so muss auch, wenn $\begin{smallmatrix} x_1 \ldots\ldots x_8 \\ z_1 \ldots\ldots z_8 \end{smallmatrix}$ entsprechende Punkte der gesuchten cubischen Transformation sein sollen, die Beziehung bestehen $b(x_1 \ldots\ldots x_8) \barwedge [RSTB](z_1 \ldots\ldots x_8)$.

Dem bekannten Strahle b a ist aber der Fundamentalkegelschnitt der Ebene z projectivisch zugeordnet (vergl. pag. 15),

und wir können deshalb letztere Relation vollständiger schreiben

$$b(a\,x_1 \ldots\ldots x_8) \;\overline{\wedge}\; [R\,S\,T\,B]\,(C\,z_1 \ldots\ldots, z_8).$$

Da wir die Punkte b und R, ausserdem die neun Punktepaare $\begin{matrix} a\,x_1 \ldots\ldots x_8 \\ C\,z_1 \ldots\ldots x_8 \end{matrix}$ kennen, so ist diese Projectivität eindeutig festgelegt (Satz II, No. 1, pag. 4), und sie bestimmt in Verbindung mit der Beziehung $a(b\,x_1 \ldots.) \;\overline{\wedge}\; R(C\,z_1 \ldots.)$ eindeutig unsere Transformation 3ter Ordn.

Man gelangt zu einem wesentlich anderen Resultat, wenn man nicht den dem Punkte b zugeordneten Fundamentalpunkt C, sondern einen der drei übrigen einfachen Fundamentalpunkte der z-Ebene, z. B. S, von vornherein giebt. Alsdann genügen zur Festlegung sieben Punktepaare, von denen fünf völlig willkürlich sind. Denn construiren wir vermöge der Beziehung $a(x_1 \ldots x_5) \;\overline{\wedge}\; R(z_1 \ldots z_5)$ den Punkt R und wählen zwei neue Punktepaare $\begin{matrix} x_6 & x_7 \\ z_6 & z_7 \end{matrix}$ der Bedingung gemäss

$$a(x_1 \ldots x_5\,x_6\,x_7) \;\overline{\wedge}\; R(z_1 \ldots z_5\,z_6\,z_7),$$

so ist dem Satze II. No. 1, pag. 4 zu Folge eindeutig die Relation

$$b(x_1 \ldots\ldots x_7) \;\overline{\wedge}\; [R\,S\,T\,B]\,(z_1 \ldots\ldots z_7),$$

mithin auch die cubische Verwandtschaft bestimmt.

II. Die Transformation 3ter Ordn. ist eindeutig festgelegt, sobald man einen einfachen Fundamentalpunkt der x-Ebene, z. B. b, den zugeordneten Fundamentalpunkt C der z-Ebene und acht Punktepaare kennt, von denen sechs unabhängig sind.

Beweis. Die Beziehung

$$a(b\,x_1 \ldots. x_6) \;\overline{\wedge}\; R(C\,z_1 \ldots. z_6)$$

definirt uns zunächst drei Doppelpunktpaare $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix}$. Wir wählen eins derselben $\begin{matrix} a_1 \\ R_1 \end{matrix}$ und nehmen noch zwei Punktepaare $\begin{matrix} x_7 & x_8 \\ z_7 & z_8 \end{matrix}$ derartig an, dass

$$a_1\,(b\,x_1 \ldots. x_6\,x_7\,x_8) \;\overline{\wedge}\; R_1\,(C\,z_1 \ldots. z_6\,z_7\,z_8)$$

ist. Alsdann ist auch die Relation

$$b(a_1\,x_1 \ldots\ldots x_8) \;\overline{\wedge}\; [R_1\,S\,T\,B]\,(C\,z_1 \ldots\ldots z_8),$$

und somit unsere Transformation eindeutig festgelegt.

Geben wir anstatt des Punktes C einen der dem Punkte b nicht zugeordneten einfachen Fundamentalpunkt der Ebene z, z. B. S, so existiren, wenn man ausserdem noch sieben unabhängige Punktepaare kennt, drei Transformationen 3ter Ordn., welche diesen Daten Genüge leisten. Denn hat man die Punkte a und R in bekannter, dreideutiger Weise vermittelst der Bedingung $a(x_1 \ldots x_7) \overline{\wedge} R(z_1 \ldots z_7)$ gefunden, so ist auch die Beziehung

$$S(z_1 \ldots z_7) \overline{\wedge} [a\,b\,c\,s](x_1 \ldots x_7)$$

festgelegt etc.

III. Die Transformation 3ter Ordn. ist eindeutig bestimmt, wenn gegeben sind drei einfache Fundamentalpunkte der Ebene x, z. B. die Punkte b c s, ferner die vier einfachen Fundamentalpunkte B C S T der Ebene z und zwei unabhängige Punktepaare $\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{matrix}$.

Beweis. Wir gehen aus von den beiden Projectivitäten

1) $a(b\,c\,s\,x_1\,x_2) \overline{\wedge} R(C\,B\,T\,z_1\,z_2)$,

2) $S(z_1\,z_2 \ldots .) \overline{\wedge} [a\,b\,c\,s](x_1\,x_2 \ldots)$,

von denen zunächst keine durch die gemachten Angaben festgelegt zu sein scheint. Berücksichtigt man jedoch, dass das Strahlbüschel $S(z_1\,z_2 \ldots)$ die bekannten Strahlen S (B C T) enthält, welchen nach § 1, pag. 15, die drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels [a b c s] bezüglich entsprechen, und zwar

dem Strahl SB das Gradenpaar a c . b s,

〃 〃 SC 〃 〃 a b . s c,

〃 〃 ST 〃 〃 a s . c b,

so ist klar, dass unsere Daten auf Grund des Satzes II, No. 1, pag. 4, bereits eindeutig den Punkt a, also auch die Beziehung 2) bestimmen müssen. Allerdings liegt hier ein ganz specieller Fall vor, und es dürfte deshalb nicht überflüssig sein, unsere Behauptung ohne den eben angezogenen Satz zu erweisen. Zu dem Behufe wählen wir eine quadratische Verwandtschaft zwischen x und y derartig, dass b, c, s die Hauptpunkte in x sind, während die beliebig in y anzunehmenden Hauptpunkte $\beta\ \gamma\ \sigma$ heissen mögen, und construiren zu x_1 und x_2 die entsprechenden Punkte y_1, y_2. Einem beliebigen Strahlbüschel $\alpha(y_1\,y_2 \ldots)$ der Ebene y ist alsdann ein projectivisches Kegel-

schnittbüschel [a b c s] zugeordnet, wenn a und α zwei entsprechende Punkte bezeichnen, und es entspricht

dem Strahle $\alpha\beta$ das Gradenpaar a b . c s,

$=$ $=$ $\alpha\gamma$ $=$ $=$ a c . b s,

$=$ $=$ $\alpha\sigma$ $=$ $=$ a s . b c.

Bestimmt man jetzt den Punkt α so, dass

$$\alpha(\beta\,\gamma\,\sigma\,y_1\,y_2) \;\overline{\wedge}\; S(C\,B\,T z_1\,z_2)$$

ist, und construirt zu α den zugehörigen Punkt a, so muss offenbar

$$S(z_1\,z_2\ldots) \;\overline{\wedge}\; [a\,b\,c\,s)(x_1\,x_2\ldots)$$

sein, und zwar müssen den Strahlen S(B C T) bezüglich die drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels [a b c s], wie verlangt worden, entsprechen.

Hätten wir übrigens nur ein Punktepaar $\begin{matrix} x_1 \\ z_1 \end{matrix}$ gegeben, so würde die Beziehung

$$\alpha(\beta\,\gamma\,\sigma\,y_1) \;\overline{\wedge}\; S(C\,B\,T\,z_1)$$

für Punkt α einen bestimmten Kegelschnitt definiren, der durch $\beta\,\gamma\,\sigma\,y_1$ geht. Diesem entspricht alsdann vermöge unserer Hilfsverwandtschaft eine Grade durch x_1, welche der geometrische Ort des Punktes a sein muss. Während also aus der Relation

$$S(z_1\,z_2\,z_3\,z_4) \;\overline{\wedge}\; [a\,b\,c\,s](x_1\,x_2\,x_3\,x_4),$$

wenn die Basispunkte b c s, der Mittelpunkt S des Strahlbüschels und vier beliebige Punktepaare $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}$ gegeben sind, als Ort für a eine Curve 4ter Ordn. folgt, die durch $\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \end{matrix}$ b c s $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ geht (Satz II, No. 2, pag. 4), so zerfällt für die vorliegende specielle Aufgabe diese Curve in eine Grade durch x_1 und das Dreieck b c s. Auf einer der Seiten dieses Dreiecks kann natürlich Punkt a nicht liegen, wenn anders das Kegelschnittbüschel [a b c s] ein eigentliches sein soll, und es kommt mithin nur jene den Punkt x_1 enthaltende Grade als Ort für a in Betracht.

Da wir noch ein Punktepaar $\begin{matrix} x_2 \\ z_2 \end{matrix}$ gegeben hatten, so finden wir als zweiten Ort für a eine bestimmte durch x_2 gehende Grade. Der Schnittpunkt jener beiden Graden ist offenbar Punkt a selbst. Haben wir denselben auf diese Weise construirt, so ergiebt sich aus

$$a\,(b\,c\,s\,x_1\,x_2)\ \overline{\wedge}\ R\,(C\,B\,T\,z_1\,z_2)$$

eindeutig Punkt R. Die Relationen 1) und 2) sind somit eindeutig festgelegt, folglich auch unsere cubische Verwandtschaft. q. e. d.

Ich will jetzt noch eine kurze Zusammenstellung von Fällen geben, in denen die cubische Transformation durch Fundamentalpunkte und Punktepaare bestimmt erscheint.

Die Cremona'sche Transformation 3ter Ordn. wird eindeutig festgelegt

1.	durch die Punkte				a^2	b,				und 9 Pp.	(5 unabh.)
2.	=	=	=	=	,	den Punkt	B	=	7	=	=
3.	=	=	=	=	,	=	S	=	7	=	=
4.	=	=	=	=	,	=	T	=	7	=	=
5.	=	=	=	=	,	=	C	=	8	=	(4 unabh.)
6.	=	=	=	=	,	=	R^2	=	9	=	(3 unabh.)
7.	=	=	=	=	,	die Punkte	R^2B	=	7	=	=
8.	=	=	=	=	,	=	R^2S	=	7	=	=
9.	=	=	=	=	,	=	R^2T	=	7	=	=
10.	=	=	=	=	,	=	R^2C	=	8	=	(2 unabh.)
11.	=	=	=	=	,	=	BS	=	5	=	(5 unabh.)
12.	=	=	=	=	,	=	BT	=	5	=	=
13.	=	=	=	=	,	=	ST	=	5	=	=
14.	=	=	=	=	,	=	BC	=	6	=	(4 unabh.)
15.	=	=	=	=	,	=	SC	=	6	=	=
16.	=	=	=	=	,	=	TC	=	6	=	=
17.	=	=	=	=	,	=	BCS	=	4	=	=
18.	=	=	=	=	,	=	BCT	=	4	=	=
19.	=	=	=	=	,	=	CST	=	4	=	=
20.	=	den Punkt			a^2	,		=	11	=	(5 unabh.)
21.	=	=	=	=	,	den Punkt	B	=	9	=	=
22.	=	=	=	=	,	=	C	=	9	=	=
23.	=	=	=	=	,	=	S	=	9	=	=
24.	=	=	=	=	,	=	T	=	9	=	=

25. durch den Punkt a^2, den Punkt R^2 und 11 Pp. (3 unabh.)
26. " " " ", die Punkte BC " 7 " (5 unabh.)
27. " " " ", " " BS " 7 " "
28. " " " ", " " BT " 7 " "
29. " " " ", " " CS " 7 " "
30. " " " ", " " CT " 7 " "
31. " " " ", " " ST " 7 " "
32. " " " ", " " BCS " 5 " "
33. " " " ", " " BCT " 5 " "
34. " " " ", " " STB " 5 " "
35. " " " ", " " STC " 5 " "
36. " die Punkte bcst, " " BCST " 1 " (1 unabh.)
37. " " " " ", " " BCS " 2 " (2 unabh.)
38. " " " " ", " " BCT " 2 " "
39. " " " " ", " " STB " 2 " "
40. " " " " ", " " STC " 2 " "
41. " " " bcs, " " BCS " 3 " (3 unabh.)
42. " " " " ", " " STB " 3 " "
43. " " " " ", " " STC " 3 " "
44. " " " " ", " " BS " 4 " (4 unabh.)
45. " " " " ", " " CS " 4 " "
46. " " " " ", " " TS " 4 " "
47. " " " " ", den Punkt S " 5 " (5 unabh.)
48. " den Punkt b, " " C " 8 " (6 unabh.)
49. " " " ", " 9 " (7 unabh.)
50. " " 11 " "

Die cubische Transformation ist mehrdeutig bestimmt und zwar:

4 deutig durch $_2$

51. die Punkte a b, die Punkte BST und 4 Pp. (4 unabh.)
52. " " ", " " BCST " 3 " (3 unabh.)
53. " bcst, " " BC " 3 " "
54. " " ", " " BS " 3 " "
55. " " ", " " BT " 3 " "
56. " " ", " " CS " 3 " "
57. " " ", " " CT " 3 " "
58. " " ", " " ST " 3 " "

59. die Punkte b c s, die Punkte B C und 4 Pp. (4 unabh.)
60. " " , " " B T " 4 " "
61. " " , " " C T " 4 " "
3 deutig durch
62. die Punkte " , " " B C T " 3 " (3 unabh.)
7 deutig durch
63. die Punkte " , den Punkt B " 5 " (5 unabh.)
64. " " , " " C " 5 " "
65. " " , " " T " 5 " "
12 deutig durch
66. die Punkte " , " 6 " (6 unabh.)
3 deutig durch
67. die Punkte b c, die Punkte B C " 5 " (5 unabh.)
68. " " , den Punkt B " 6 " (6 unabh.)
69. " " , " " C " 6 " "
6 deutig durch
70. die Punkte " , " " S " 6 " "
71. " " , " " T " 6 " "
3 deutig durch
72. die Punkte " , " 7 " (7 unabh.)
73. den Punkt b, den Punkt B " 7 " "
74. " ", " " S " 7 " "
75. " ", " " T " 7 " "

Sämmtliche hier angeführten Beispiele zeigen, dass ein beliebiger Fundamentalpunkt, gleichgültig ob er ein einfacher oder ein doppelter ist, stets den Werth eines unabhängigen oder zweier abhängigen Punktepaare repräsentirt, und zwar kann ein unabhängiges Punktepaar immer dann durch einen einfachen Fundamentalpunkt ersetzt werden, wenn der zugeordnete Fundamentalpunkt bereits bekannt ist. (Vergl. pag. 20).

In allen Fällen besitzen die festlegenden Daten das constante Gesammtgewicht von neun unabhängigen oder achtzehn abhängigen Punktepaaren.

§ 5.

Wir haben bisher nur solche Aufgaben behandelt, in denen die Transformation 3ter Ordn. durch Fundamentalpunkte und Punktepaare bestimmt ist. Es mögen hier noch einige Be-

merkungen über die Ersetzbarkeit von Fundamentallinien Platz finden.

Wie bekannt, treten bei der cubischen Transformation vier Fundamentalgrade und ein Fundamentalkegelschnitt in jeder Ebene auf, und es entspricht einer Fundamentalgraden (z. B. a b) der einen Ebene ein einfacher Fundamentalpunkt (C) der zweiten Ebene, dem Fundamentalkegelschnitt aber in x der Doppelpunkt R in z etc.

Für die quadratische Verwandtschaft haben wir bereits an einer Reihe von Beispielen gezeigt, dass das Gewicht einer unabhängigen Hauptlinie gleich dem eines unabhängigen oder zweier abhängigen Punktepaare ist, das Gewicht einer abhängigen Hauptlinie aber, d. h. einer solchen, die durch einen gegebenen Hauptpunkt geht, gleich dem eines abhängigen Punktepaares. Ich behaupte zunächst, dass auch bei der Transformation 3ter Ordn. einer unabhängigen Fundamentalgraden der Werth eines unabhängigen oder zweier abhängigen Punktepaare zukommt. —

Geben wir z. B. die Fundamentalgrade a b und fragen nach der Anzahl von Punktepaaren, welche zur Festlegung nöthig sind, so haben wir, da die Transformation durch achtzehn abhängige Punktepaare bestimmt erscheint, noch über sechszehn weitere abhängige Punktepaare zu verfügen, wenn unsere Behauptung richtig ist. Aus der Relation

$$a\,(x_1 \ldots .)\ \overline{\wedge}\ R\,(z_1 \ldots .)$$

geht aber hervor, dass sich unter diesen höchstens sechs unabhängige befinden können, welche als Datum das Gewicht von zwölf abhängigen Punktepaaren darstellen. Wir werden mithin beweisen müssen, dass die Transformation festgelegt ist durch die Fundamentalgrade a b und zehn Punktepaare, von denen sechs willkürlich gewählt werden können.

Beweis. Es seien $\begin{matrix} x_1 \ldots . x_6 \\ z_1 \ldots . z_6 \end{matrix}$ die sechs unabhängigen Punktepaare. Die Beziehung $a\,(x_1 \ldots . x_6)\ \overline{\wedge}\ R\,(z_1 \ldots . z_6)$ definirt alsdann für Punkt a eine Curve 3ter Ordn., welche von der Graden a b in drei Punkten $a_1\ a_2\ a_3$ getroffen wird. Wir fassen einen dieser drei Schnittpunkte, z. B. a_1, als Doppelpunkt

der Ebene x auf und construiren in bekannter Weise den Punkt R_1. Nehmen wir jetzt noch vier neue Punktepaare $\begin{matrix} x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} \end{matrix}$ an, welche der Bedingung genügen

$$a_1 (x_1 \ldots\ldots x_{10}) \overline{\wedge} R_1 (z_1 \ldots\ldots z_{10}),$$

so muss sein

$$Z (z_1 \ldots\ldots z_{10}) \overline{\wedge} [a_1^2 b c s t X] (x_1 \ldots\ldots x_{10}).$$

Letztere Relation legt für die Fundamentalpunkte b c s t eine bestimmte Curve 5ter Ordn. fest, die in a_1 einen dreifachen Punkt besitzt (Satz II pag. 25). Die Grade a b schneidet mithin diese Curve noch in zwei freien Punkten b_1 und b_2, und es ergeben sich somit zwei Transformationen 3ter Ordn.

Kennt man ausser der Fundamentalgraden a b von vornherein den Doppelpunkt a, so lässt sich auf demselben Wege zeigen, dass die Transformation zweideutig bestimmt ist, wenn wir noch zehn Punktepaare geben, von denen fünf willkürlich sind. Da der Punkt a und jene zehn Punktepaare das Gewicht von siebzehn abhängigen Punktepaaren haben, so kommt also der Fundamentalgraden a b, wenn der Fundamentalpunkt a bereits bekannt ist, der Werth eines abhängigen Punktepaares zu. —

Geben wir die Fundamentalgrade a b und den einfachen Fundamentalpunkt b, so wird die Transformation eindeutig festgelegt sein, wenn wir ausserdem noch neun Punktepaare kennen, von denen sechs unabhängig sind. Es ist dies leicht mit Hilfe der Projectivitäten

$$a (x_1 \ldots x_6\, x_7\, x_8\, x_9) \overline{\wedge} R (z_1 \ldots z_6\, z_7\, z_8\, z_9),$$
$$b (x_1 \ldots\ldots x_9) \overline{\wedge} [R S T B] (z_1 \ldots\ldots z_9)$$

einzusehen. Das Gewicht der abhängigen Fundamentalgraden a b ist mithin auch in diesem Falle, wie man sich durch Abzählen überzeugen wird, gleich dem eines abhängigen Punktepaares. —

Es sei jetzt der Fundamentalkegelschnitt f der Ebene x von vornherein bekannt. Ich behaupte: die Transformation ist eindeutig bestimmt, wenn ausserdem noch sieben Punktepaare $\begin{matrix} x_1 \ldots\ldots x_7 \\ z_1 \ldots\ldots z_7 \end{matrix}$ gegeben sind, von denen sechs $\begin{matrix} x_1 \ldots x_6 \\ z_1 \ldots z_6 \end{matrix}$ willkürlich gewählt werden können.

Beweis. Da der Doppelpunkt a auf dem Kegelschnitt f liegen muss, aus der Beziehung $a\,(x_1 \ldots . x_6) \overline{\wedge} R\,(z_1 \ldots . z_6)$ sich aber für Punkt a eine Curve 3ter Ordn. als Ort ergiebt, so kann a selbst nur einer der sechs Schnittpunkte sein, welche diese beiden Linien im Allgemeinen besitzen. Wir bezeichnen mit a_1 einen derselben, construiren den Punkt R_1 und wählen ein siebentes Punktepaar so, dass

$$a_1\,(x_1 \ldots . x_7) \overline{\wedge} R_1\,(z_1 \ldots . z_7) \text{ ist.}$$

Alsdann erhalten wir nach No. I des § 3 pag. 24 als Bedingung für das Bestehen der Relation

$$Z\,(z_1 \ldots . z_7) \overline{\wedge}^{2} [a_1\,b\,c\,s\,t\,X]\,(x_1 \ldots . x_7)$$

die sieben Gleichungen

$$f^{x_i}\,p_{x_i}\,.\,n_{z_i} - (\varkappa_1\,\varphi_1^{x_i} \ldots . \varkappa_7\,\varphi_7^{x_i})\,m_{z_i} = 0,$$

wo für i die Indices 1 . . . . . 7 zu setzen sind. Bestimmt man die linear in diese Gleichungen eingehenden Unbekannten $\varkappa_i$ und substituirt die gefundenen Werthe in

$$\Phi = \varkappa_1\,\varphi_1 + \ldots . \varkappa_7\,\varphi_7 = 0,$$

so kennt man eine Curve 3ter Ordn. Φ, auf welcher der Kegelschnitt f die Punkte b c s t ausschneidet. Die Transformation ist somit eindeutig festgelegt. — Für das Gewicht des Fundamentalkegelschnitts f folgt hieraus, dass dasselbe gleich ist dem von fünf abhängigen Punktepaaren.

Sehen wir von vornherein den Doppelpunkt a und den Kegelschnitt f als bekannt an, so finden wir in analoger Weise unsere Verwandtschaft eindeutig bestimmt, wenn ausserdem noch sieben Punktepaare gegeben sind, von denen fünf willkürlich gewählt werden können. Der Fundamentalkegelschnitt f ersetzt also in diesem Falle das Datum von vier abhängigen Punktepaaren. —

Dasselbe Gewicht hat f, wenn statt a ein einfacher Fundamentalpunkt der Ebene x, z. B. b, gegeben ist. Denn die Transformation wird dann festgelegt, allerdings nicht mehr eindeutig, sondern im Allgemeinen sechsdeutig, wenn man ausserdem sechs beliebige Punktepaare kennt.

Beweis. Der Kegelschnitt f und jene Curve 3ter Ordn., auf der sich Punkt a wegen der Relation

$$a\,(x_1 \ldots . x_6) \overline{\wedge} R_1\,(z_1 \ldots . z_6)$$

bewegen muss, bestimmen sechs Punkte a_i. Wir wählen einen beliebigen z. B. a_1 $\overline{\wedge}$ zum Doppelpunkt der Ebene x und construiren den zugehörigen Doppelpunkt R_1 der Ebene z. Soll jetzt

$$Z(z_1 \ldots z_6) \overline{\wedge}^2 [a_1\, b\, c\, s\, t\, X] (x_1 \ldots x_6)$$

sein, so müssen die sechs Gleichungen bestehen

$$f^{x_i}\, p_{x_i}\, n_{z_i} - (x_1\, \varphi_2^{x_i} + \ldots . x_6\, \varphi_6^{x_i})\, m_{z_i} = 0,$$

wo wir für i die Nummern 1 . . . . 6 zu setzen haben, und wo die φ_i irgend sechs Curven 3ter Ordn. darstellen, die durch a_1 zweimal, durch b einmal gehen. Diese Gleichungen lösen wir nach den x_i auf und erhalten so, indem wir substituiren, eine Curve 3ter Ordn. $\Phi = x_1\, \varphi_1 + \ldots . x_6\, \varphi_6 = 0$, welche dem Büschel $[a\, b\, c\, s\, t\, X]^2$ angehören muss. Die Punkte c s t sind mithin als die drei freien Schnittpunkte von f und Φ bestimmt, und es ergiebt sich somit für jeden Punkt a_i eindeutig eine Transformation 3ter Ordn., im Ganzen also sechs. —

Kennen wir von vornherein zwei Fundamentalpunkte der Ebene x, z. B. a^2 und b, oder auch c und b, so finden wir in Uebereinstimmung mit obigen Resultaten, dass alsdann der Fundamentalkegelschnitt f jener Ebene das Gewicht von drei abhängigen Punktepaaren besitzt; geben wir ferner drei Fundamentalpunkte in x, so hat f den Werth von zwei abhängigen Punktepaaren; sind endlich vier Fundamentalpunkte in x bekannt, so ersetzt f nur das Datum eines abhängigen Punktepaares. —

Die Lösung unseres Problems lässt sich jetzt in folgender Weise aussprechen:

Ertheilt man einem Fundamentalpunkte und einer unabhängigen Fundamentalgraden der Cremona'schen Transformation 3ter Ordn. das Gewicht von je einem unabhängigen oder je zwei abhängigen Punktepaaren, einer abhängigen Fundamentalgraden das Gewicht eines abhängigen Punktepaares, dem Fundamentalkegelschnitt der einen Ebene aber das Gewicht von 1, 2, 3, 4, 5 abhängigen Punktepaaren, je nachdem 4, 3, 2, 1, 0 Fundamentalpunkte jener Ebene von vornherein gegeben sind, so besitzen die festlegenden Daten von Fundamentalpunkten, Fundamental-

linien nnd entsprechenden Punktepaaren stets das Gesammtgewicht von neun unabhängigen oder achtzehn abhängigen Punktepaaren.

Die Methoden, deren wir uns zur Bestimmung der cubischen Verwandtschaft bedienten, lassen sich ohne Schwierigkeit ausdehnen auf die Cremona'sche Transformation n^{ter} Ordn. mit einem $n-1$ fachen und $2n-2$ einfachen Fundamentalpunkten. Es ergiebt sich, dass das Gesammtgewicht der festlegenden Daten dieser Transformation stets gleich sein muss dem von $2n+3$ unabhängigen oder $4n+6$ abhängigen Punktepaaren. —

Lebenslauf.

Ich, Theodor Maschke, bin am 13. Januar 1855 in Breslau geboren. Mein Vater, Ludwig Maschke, und meine Mutter, Susanna Maschke, geb. Mogalle, sind beide noch am Leben.

Ostern 1874 von der Realschule zum heiligen Geist hierselbst mit dem Zeugniss der Reife entlassen, bezog ich die hiesige Universität und hörte die Vorlesungen der Herren Professoren:

Cohn, Dilthey, Dorn, Galle, Loewig, Meyer, Poleck, Roemer, Rosanes, Schroeter.

Mehrere Semester betheiligte ich mich an den Seminar-Uebungen, welche die Herren Professoren Schroeter und Rosanes veranstalteten, und arbeitete ein Semester lang im physikalischen Institut unter Leitung der Herren Professoren Meyer und Dorn.

Allen meinen hier genannten Lehrern, insbesondere Herrn Professor Rosanes, der mich bei der vorliegenden Arbeit mit seinem Rathe unterstützt hat, sage ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank.

Thesen.

1. Die Zahl der Bedingungen, denen eine Cremona'sche Transformation unterworfen werden kann, hängt allein ab von der Anzahl der in einer Ebene auftretenden Fundamentalpunkte.
2. Dem Studium der analytischen Geometrie muss das der synthetischen vorangehen.
3. Eine geschickte Wahl der Bezeichnung ist oft die Quelle mathematischer Entdeckungen.
4. Die wesentlichsten Eigenschaften der Kegelschnitte und Oberflächen 2ter Ordn. beruhen auf der Polarentheorie.